量子と非平衡系の物理
Physics of Quanta and Non-equilibrium Systems

量子力学の基礎と量子情報・量子確率過程
Introductory Quantum Mechanics,
Quantum Information and Quantum Stochastic Processes

柴田文明 有光敏彦
Fumiaki Shibata Toshihico Arimitsu
番 雅司 北島佐知子
Masashi Ban Sachiko Kitajima

東京大学出版会

Physics of Quanta and Non-equilibrium Systems:
Introductory Quantum Mechanics, Quantum Information
and Quantum Stochastic Processes
Fumiaki SHIBATA, Toshihico ARIMITSU,
Masashi BAN and Sachiko KITAJIMA
University of Tokyo Press, 2009
ISBN978-4-13-062611-8

はじめに

『量子と非平衡系の物理』という本書のタイトルには，多少の説明が必要であろう．まず，量子とは，量子力学の量子である．素粒子，原子核，原子，分子といったミクロな物質の振舞いを記述する基本法則が量子力学であり，「量子」はこれらミクロな物質の基礎的存在様式となっている．このことはただちに，原子や分子が量子である，ということを意味しているわけではない．ある分子を取り出したとき，その分子は複数の原子から成り立っているのだが，分子全体を眺めれば振動，回転といった自由度がある．そして，それぞれの自由度に固有の量子が存在する．この意味で「量子」という概念はかなり広範な領域をおおう．他方，非平衡系は，エネルギーや物質の出入りを伴うダイナミックな系である．ダイナミックとは，外界からエネルギーを取り入れ，また放出しつつ，時間とともに変化する在り様をいう．この意味で，人間を含む生物・生命系は，Shrödinger（シュレーディンガー）の『生命とは何か』を引用するまでもなく，典型的な非平衡系である．

しかし，本書が扱う題材には，非平衡生命系の科学，は含まれていない．タイトルが示すように，量子とかかわる限りの非平衡系（= 量子非平衡系）を物理の視点から解明しよう，というのが本書の意図するところである．また，本書の内容は理論上の方法論とその具体例への適用に重点がおかれている．では，このような限定により，取り扱える対象範囲が狭まってしまうであろうか．それが，まったくそうではない，ということは本書を読み進むにつれ，十分に納得いただけるはずである．

その理由の第一は，量子非平衡系の研究がさまざまな視点を取り入れながら深められてきていること，そして第二には，量子力学が相手とする対象はミクロな物質世界のみではないということが，近年，明らかになってきたことがあげられる．

具体的にこれらのことがらを説明するために，本書の構成の概略にふれておこう．本書全体を大きく区分けすると，3 部から成る．各部はそれぞれ 3 章から構成され，第 I 部「量子と非平衡系の基礎」（第 1 章 − 第 3 章），第 II 部「緩和現象と量子情報の物理」（第 4 章 − 第 6 章），第 III 部「量子確率過程への誘い」（第 7 章 − 第 9 章）となっている．第 I 部と第 III 部には，量子と非平衡系を扱う方法論が取り上げられているので，読者はここから具体的な問題に取り組む際に必要な，十分の知識を得ることができるであろう．また，第 II 部では「量子」が情報処理，

情報通信という，一見したところまったく異質の分野で活躍する様子が示されている．さらに第II部では，量子と情報が織りなす量子情報システムは，意外なことに，量子非平衡系という視点から統一的に捉え得るという，現在進展中の先端研究も紹介されている．

本書の第I部で展開されている方法論を学んだ後に，第II部の具体的問題に取り組めば，この分野における基礎的素養は十分身につくであろう．意欲的な読者には，さらに第III部に進むことを推奨する．第III部は本書の特徴の1つであって，量子確率過程の諸問題の検討，さらには，Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics（NETFD）という新たな方法論の提示が含まれている．以上のような内容に首尾一貫性をもたせるため，まず各部に担当著者を配置して原稿の執筆を進めた．具体的には，第I部（柴田・北島），第II部（番），第III部（有光），という担当であるが，原稿執筆に際し，各部が寄木細工とならないように著者達は何回も会合を重ね，調整，連絡を行った．そして，各部が相互に密接につながり，全体として可能な限り統一性を保つように心掛けた．

本書が対象とする読者層は大学学部生から大学院生を想定している．第I部の書き出しは，Dirac（ディラック）流量子力学形式のきわめて平易な解説であるが，これは物理を専門としない人たちに対する配慮の結果である．理工系分野の学部教育においては，量子力学といえばShrödinger流の波動関数に終始することが多い．量子情報などに興味を抱いた人の中には，Dirac流に戸惑う人もいるであろう．そのような読者に対しても本書が手助けとなることを願っている．

本書の内容は以上のとおりであるが，本書のタイトルに関連して，何が書かれていないのかを記しておこう．まず，量子非平衡系を扱う方法論の1つにFeynman（ファインマン）の経路積分法があるが，これにはふれていない．その理由は，第I部－第III部の一貫した流れの中に，この方法論を取り入れることが難しかったからである．また，平衡状態近傍を扱う久保理論（線形応答理論）にもふれていない．この理論はすでに確立したものとして多くの標準的テキストで取り上げられているからである．

最後に，本書が完成するまでの10年の長きにわたり励ましを与えて下さった，東京大学出版会の丹内利香氏に心からなるお礼を申し上げる．同氏の忍耐が本書を誕生させたことを，感謝をもって記しておきたい．

2009年10月

著者を代表して　　柴田 文明

目　次

第I部
量子と非平衡系の基礎

量子力学は原子や分子といったミクロな世界を解明する基礎理論であり，おおまかにいえば3つの流儀がある．歴史的にはHeisenberg（ハイゼンベルク）の方法（物理量の振舞いを追う流儀）がはじめに登場し，わずかに遅れてSchrödinger（シュレーディンガー）の方法（物理系の状態に注目する流儀）が現れた．これら2つの方法はDirac（ディラック）とJordan（ヨルダン）によって一般的な枠組の中に統合された．3番目の方法はFeynman（ファインマン）の経路積分法であり，量子系の状態変化を可能な経路すべてにつき和をとる（積分する）という流儀である．

第I部ではDiracの定式化に従い，量子力学の基礎事項を学ぶところから始める．最も単純だが重要な物理系として，大きさ$\frac{1}{2}$のスピン（電子などが生まれながらにもっているミクロな磁石）を例題として用いつつ，量子力学の一般的な枠組を構築し，不確定性関係に及ぶ．またスピンと並んで重要なもう1つの物理系である1次元調和振動子の問題を解く．

これらの成果をもとに，複数の物理系が互いに相互作用をしている量子複合系の問題を解く．スピンと1次元調和振動子から成る系および入射粒子と検出装置から成る系のそれぞれが，厳密に解けることを示そう．第I部の最後では，環境世界の影響下にある量子系が時間とともにたどる変化（非平衡ダイナミクス）を記述する基本方程式を導出する．

第1章

量子力学の基礎

本章では，量子力学の基礎的事項を概説する．すでに量子力学を学習した人が知識をまとめるために用いてもよいし，初学者が量子力学を学ぶための入門書としての役割ももたせてある．数学的厳密性にはこだわらず，わかりやすさを第一とした．

まず数学的準備として簡単なベクトル空間からはじめて，Dirac の記法（ブラとケット）を導入する．ベクトルを量子系の状態に，また行列を物理量に対応させれば量子力学の枠組を構築できる．ミクロな磁石であるスピンと 1 次元調和振動子の問題を解き，不確定性関係に及ぶ．さらに物理系の時間発展を定める基本方程式を導く．期待値（平均値）を求める際に有用な密度演算子の導入も行う．

1.1　数学的準備

1.1.1　ブラとケット

量子力学では物理系の状態をベクトル（状態ベクトル）を用いて表す．そこで最も単純な 2 次元の空間を例にして必要な事項をまとめておく．

任意の実ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とかけば

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y \tag{1.1.1}$$

である．ここに $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ はそれぞれ x 軸，y 軸方向の単位ベクトルである（図 1.1 を参照）．単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$ は通常 $(1, 0)$，また，$\boldsymbol{e}_y$ は $(0, 1)$ と表されるので，ベクトル $\boldsymbol{r}$ は (x, y) となる．ここまでは馴染のことだが，新たな記号を導入する．まずベクトルの成分を縦に並べたものを

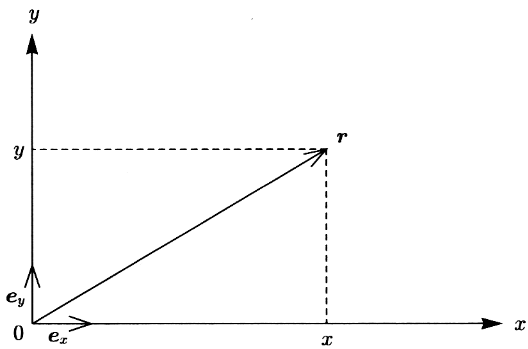


図 **1.1**　2 次元の実ベクトル空間.

$$|e_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

のようにかき，縦ベクトルあるいはケットベクトル（あるいは単にケット）とよぶ．これは $\boldsymbol{e}_x$ に対応している．同様に $\boldsymbol{e}_y$ に対応して

$$|e_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

である．これらを用いると (1.1.1) は

$$|r\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

$$= x|e_x\rangle + y|e_y\rangle \tag{1.1.5}$$

となる．

単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ の成分を並べるのに縦横の区別はないが，上に導入した縦ベクトル (1.1.2), (1.1.3) に対応する横ベクトルをそれぞれ

$$\langle e_x| = (1, 0), \quad \langle e_y| = (0, 1) \tag{1.1.6}$$

とかき，ブラベクトル（ブラ）とよぶ．したがって (1.1.4) に対応して

$$\langle r| = (x, y) \tag{1.1.7}$$

$$= \langle e_x|x + \langle e_y|y \tag{1.1.8}$$

である．ここでブラベクトルとケットベクトルとの内積の計算は

$$\langle e_x|e_y\rangle = (1, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\times 0 + 0\times 1 = 0 \tag{1.1.9}$$

のように行う．ベクトルの内積＝成分同士の積の和，という規則は従来どおりであり変わらない．

しかしブラとケットの順序を逆にすると

$$|e_x\rangle\langle e_y| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1\times 0 & 1\times 1 \\ 0\times 0 & 0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

のように行列となる．

1.1.2 正規直交系

基本ベクトルの性質を調べておこう．内積については (1.1.9) を参照して

$$\langle e_x|e_x\rangle = \langle e_y|e_y\rangle = 1, \tag{1.1.11}$$

$$\langle e_x|e_y\rangle = \langle e_y|e_x\rangle = 0 \tag{1.1.12}$$

が成り立つ．ここで，Kronecker delta（クロネッカーのデルタ）記号

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & (k = \ell\ \text{のとき}) \\ 0 & (k \neq \ell\ \text{のとき}) \end{cases} \tag{1.1.13}$$

という記法を導入すれば (1.1.11), (1.1.12) は

$$\langle e_k|e_\ell\rangle = \delta_{k\ell} \tag{1.1.14}$$

という単純な形となる．ここで k, ℓ は x か y のいずれかである．(1.1.14) が成り立つとき，$|e_x\rangle$, $|e_y\rangle$ は**正規直交系**を成すという．

1.1.3 完全系

$|e_x\rangle$ に対して (1.1.10) の規則をあてはめると

$$|e_x\rangle\langle e_x| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.15}$$

となる．同様にして

$$|e_y\rangle\langle e_y| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.16}$$

であるから，(1.1.15), (1.1.16) より

$$|e_x\rangle\langle e_x| + |e_y\rangle\langle e_y| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \tag{1.1.17}$$

が成り立つ．ここで $\mathbb{I}$ という記号は単位行列を表す．(1.1.17) は

$$\sum_{k=x,y} |e_k\rangle\langle e_k| = \mathbb{I} \tag{1.1.18}$$

とかける．(1.1.18) が成り立つとき，$|e_x\rangle$, $|e_y\rangle$ は**完全系**を成すという．

したがって，(1.1.14) および (1.1.18) より $|e_x\rangle$, $|e_y\rangle$ は**正規直交完全系**を成していることがわかる．

1.1.4 ベクトルの展開

2 次元空間のベクトルを $|r\rangle$ とかくと，ベクトルに単位行列をかけても変わらないので

$$|r\rangle = \mathbb{I}|r\rangle = \sum_{k=x,y} |e_k\rangle\langle e_k|r\rangle = \sum_{k=x,y} c_k|e_k\rangle \tag{1.1.19}$$

である．ここで $c_k = \langle e_k | r \rangle$ とおいた．また，(1.1.18) を使っている．(1.1.4) と (1.1.6) を用いれば

$$c_x = \langle e_x | r \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \tag{1.1.20}$$

となる．同様にして $c_y = y$ が得られるので (1.1.19) は (1.1.5) にほかならない．すなわち $|e_x\rangle$, $|e_y\rangle$ が完全系を成せば，2 次元空間の任意のベクトル $|r\rangle$ は (1.1.19) のように表すことができる．

1.1.5　行列とベクトルおよびブラ・ケット

行列と縦ベクトルとの積をつくると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.21}$$

のように，新たな縦ベクトルとなる．横ベクトルと行列との積も

$$(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, x) \tag{1.1.22}$$

となって，新たな横ベクトルが得られる．ここで (1.1.5), (1.1.10) を使うと (1.1.21) の左辺は

$$|e_x\rangle\langle e_y | r \rangle = |e_x\rangle\langle e_y | (x|e_x\rangle + y|e_y\rangle) = y|e_x\rangle \tag{1.1.23}$$

となってただちに (1.1.21) の右辺の結果が得られる．ここで正規直交系の関係式 (1.1.11), (1.1.12) を用いた．同様にして (1.1.22) の左辺は

$$\langle r | e_x \rangle \langle e_y | = (x\langle e_x | + y\langle e_y |)\, |e_x\rangle\langle e_y | = x\langle e_y | \tag{1.1.24}$$

となって，ただちに (1.1.22) の右辺の結果となる．

これらの例から，

$$|e_x\rangle\langle e_y| \text{ のような“ケットとブラの背中合わせ”}$$

は，ケットを別のケットへ（(1.1.23) では，$|r\rangle$ を $|e_x\rangle$ へ）変換する作用があり，またブラを別のブラへ（(1.1.24) では，$\langle r|$ を $\langle e_y|$ へ）変換する作用がある．

そこで，“ケットとブラの背中合わせ”を演算子あるいは作用素というが，以後本書では，演算子とよぶことにしよう．

このような視点は量子力学を学ぶ際に重要である．元をただせば (1.1.21), (1.1.22) のように行列とベクトルの積の計算にすぎないのだが，ブラとケットを用いる方法論が量子力学の統一的理解を容易にすることは，後に見るとおりである．

1.2 量子力学的状態と演算子

前節でブラベクトルとケットベクトルを導入した．そこでは，ブラは横ベクトルに，ケットは縦ベクトルに対応させた．本節ではブラやケットを用いて物理系の状態を表すことを考えよう．

1.2.1 ミクロな磁石の状態

磁石が鉄を引き付けることや磁針が南北を指すことは，よく知られている．磁石の中には多くの電子が存在し，その電子の１つ１つが生まれながらに微小な磁石をもっている．この微小（ミクロ）磁石をスピンとよぶ．我々が手にする磁石は，膨大な数のスピンが，ある方向に揃ったものである．厳密に言えば，現実の磁石はこれほど単純ではないが，“磁石の物理”に深入りすることはやめておこう．

さて，電子のスピンは外から印加した磁場に反応して，２つの異なる状態をとることができる．これら２つの状態をスピン上向き状態およびスピン下向き状態とよび，それぞれ

$$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle \text{ および } \left|-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{1.2.25}$$

とかく．ケット記号の中の目印として，なぜ $+\frac{1}{2}$ や $-\frac{1}{2}$ を使うかの詳細は省くが，このように定めると実験を矛盾なく説明することができ，このときスピンの大きさは $\frac{1}{2}$ であるという．習慣的には $|+\frac{1}{2}\rangle$ を

$$|+\rangle \text{ あるいは } |\uparrow\rangle, \tag{1.2.26}$$

また，$|-\frac{1}{2}\rangle$ を

$$|-\rangle \text{ あるいは } |\downarrow\rangle, \tag{1.2.27}$$

とかくことがある．これら2つの状態は互いに直交しており，規格化することができる．すなわち

$$\left\langle +\frac{1}{2}\middle| -\frac{1}{2}\right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}\middle| +\frac{1}{2}\right\rangle = 0 \tag{1.2.28}$$

および

$$\left\langle +\frac{1}{2}\middle| +\frac{1}{2}\right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}\middle| -\frac{1}{2}\right\rangle = 1 \tag{1.2.29}$$

が成り立つ．

これらの性質が満たされることは，もう少し後（1.4 節）で一般的に示される．本節では (1.2.28), (1.2.29) を認めて進むことにすると，両式をまとめて

$$\langle m|m'\rangle = \delta_{mm'} \tag{1.2.30}$$

とかくことができる．ここに，m, m' は $+\frac{1}{2}$ あるいは $-\frac{1}{2}$ である．

以上まとめて，$|+\frac{1}{2}\rangle$, $|-\frac{1}{2}\rangle$ という2つのスピン状態は正規直交系を成す．これは (1.1.14) に対応する関係式であるが，(1.1.14) が2次元空間の基本ベクトルについての数学的な関係を表しているのに対して，(1.2.30) は電子のもつミクロな磁石がとり得る2つの状態間に成り立つ関係式という物理的な内容を有している．

以上のことは前節の内容と数学的に同等であるから，縦ベクトルを使って

$$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.31}$$

と表すことができる．また，ブラベクトルに関しても同様にして横ベクトルの表

現，すなわち，

$$\left\langle +\frac{1}{2}\right| = (1,0)\,, \quad \left\langle -\frac{1}{2}\right| = (0,1) \tag{1.2.32}$$

が成り立つ．さらに，(1.1.18) に対応して

$$\sum_{m=\pm\frac{1}{2}} |m\rangle\langle m| = \mathbb{I} \tag{1.2.33}$$

という完全性が成り立つ．

したがって，任意のスピン状態を $|\psi\rangle$ とかくと，(1.1.19) に対応して

$$|\psi\rangle = \sum_{m=\pm\frac{1}{2}} c_m |m\rangle \tag{1.2.34}$$

と展開することができる．ここで，展開係数 c_m は

$$c_m = \langle m|\psi\rangle \tag{1.2.35}$$

である．さらに，演算子を導入することができる．たとえば $|+\frac{1}{2}\rangle\langle -\frac{1}{2}|$ という演算子は状態 $|-\frac{1}{2}\rangle$ に作用して

$$\left(\left|+\frac{1}{2}\right\rangle\left\langle -\frac{1}{2}\right|\right)\left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|+\frac{1}{2}\right\rangle \tag{1.2.36}$$

のように，別の状態 $|+\frac{1}{2}\rangle$ に変換する．

1.2.2　一般的な量子状態と演算子

ミクロな磁石（スピン）に対するすべての結果は容易に一般化することができる．ある物理系のとり得る状態を

$$|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle, \cdots \tag{1.2.37}$$

とし，これらの状態が正規直交系を成せば，

$$\langle \alpha_k | \alpha_\ell \rangle = \delta_{k\ell} \tag{1.2.38}$$

である．また，(1.2.37) が完全系を成せば，

$$\sum_k |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| = I \tag{1.2.39}$$

が成り立つ．(1.2.39) の右辺には $\mathbb{I}$ のかわりに I が登場している．このことは以下の理由による．

演算子 $|\alpha_k\rangle\langle\alpha_\ell|$ を状態 $|\alpha_\ell\rangle$ に作用させると，

$$(|\alpha_k\rangle\langle\alpha_\ell|)\,|\alpha_\ell\rangle = |\alpha_k\rangle\langle\alpha_\ell|\alpha_\ell\rangle = |\alpha_k\rangle \tag{1.2.40}$$

のように，状態 $|\alpha_\ell\rangle$ は状態 $|\alpha_k\rangle$ に変換される．さらに一般的に演算子 G を導入して，

$$G = \sum_{k,\ell} |\alpha_k\rangle G_{k\ell} \langle\alpha_\ell| \tag{1.2.41}$$

とかく．ここで $G_{k\ell}$ は係数である．演算子 G は任意の状態 $|\psi\rangle$ に作用して，

$$G|\psi\rangle = \sum_k c_k |\alpha_k\rangle \tag{1.2.42}$$

のように，$|\psi\rangle$ を $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \cdots$ の線形結合の状態に変換する．ここで c_k は

$$c_k = \sum_\ell G_{k\ell} \langle\alpha_\ell|\psi\rangle \tag{1.2.43}$$

である．すなわち，

“演算子は任意の状態を別の状態に変換する”

のである．任意の状態に作用して “何もしない演算子”，I を導入しておこう．すなわち，

$$I|\psi\rangle = |\psi\rangle \tag{1.2.44}$$

であり，I を恒等演算子とよぶ．

以上の説明からわかるように，ブラやケットは演算規則を定めておけば，必ずしも横ベクトルや縦ベクトルである必要はないのである．換言すれば，ブラ，ケット，演算子という概念は，横ベクトル，縦ベクトル，行列という具体的な表現よりは広いのである．たとえば，単位行列 $\mathbb{I}$ が縦ベクトルに作用すると

$$\mathbb{I}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.45}$$

のように，“何もしない”が，この関係を行列とベクトルという具体性を離れて，

$$I\left|+\frac{1}{2}\right\rangle = \left|+\frac{1}{2}\right\rangle \tag{1.2.46}$$

とすればよいのである．

(1.2.39) の左辺は $|\alpha_k\rangle\langle\alpha_k|$ という演算子の和であるから，右辺に恒等演算子 I が現れることが了解されよう．この完全性を用いると (1.2.34) が一般化される．すなわち (1.2.44), (1.2.39) より，

$$|\psi\rangle = I|\psi\rangle \tag{1.2.47}$$

$$= \sum_k c_k|\alpha_k\rangle \tag{1.2.48}$$

を得る．ここで展開係数 c_k は，

$$c_k = \langle\alpha_k|\psi\rangle \tag{1.2.49}$$

である．したがって，

“物理系の任意の状態は完全系によって展開される”

とまとめられる．

1.3 物理量

前節ではブラベクトルあるいはケットベクトルを量子力学的な状態に対応させ

た．また演算子はその名のとおり，量子力学的状態に作用して別の状態に変換する．しかしながら，これだけではいまだ主役が足りない．古典力学を思い出してみると，粒子の位置や，運動量などの物理量が主要な役割を果たしている．量子力学においても，系の状態ベクトル（ブラやケット）の他に物理量が必要である．

1.3.1　物理量と演算子

粒子の位置や運動量のような物理量を量子力学では演算子に対応させる．一般に物理量を表す演算子を A とかくことにする．たとえば A が粒子の x 座標を表すとき，$A=x$ とかくと，その実際にとり得る値は $-\infty$ から $+\infty$ の間にあり，連続的であるだろう．しかし以下しばらく，A の実際にとり得る値は離散的（“飛び飛び”）であるとする．A のとり得る値を，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ とし，このことを式では

$$A|\alpha_n\rangle = \alpha_n|\alpha_n\rangle \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{1.3.50}$$

と表すことにする．すなわち，(1.3.50) は，

“物理量 A の実際にとり得る値は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ である”

と読むのである．このとき，α_n を A の固有値，$|\alpha_n\rangle$ を A の固有状態（固有ケット）とよぶ．また，(1.3.50) を固有値方程式という．

前節で取り上げたスピンの例を考えよう．スピンとは，電子が生まれながらにもっているミクロな磁石であり，ベクトル量，$\boldsymbol{s}=(s^x, s^y, s^z)$ で表される．3つの成分のうち s^z に注目（測定）すると，(1.2.25) で示したように，スピン上向き状態 $|+\frac{1}{2}\rangle$ とスピン下向き状態 $|-\frac{1}{2}\rangle$ の2つの状態が可能である．このとき，(1.3.50) は

$$s^z\left|+\frac{1}{2}\right\rangle = +\frac{1}{2}\left|+\frac{1}{2}\right\rangle \tag{1.3.51}$$

および

$$s^z\left|-\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{1.3.52}$$

となる．電子のもっているミクロな磁石（スピン）の z 軸方向成分 s^z は，$+\frac{1}{2}$ および $-\frac{1}{2}$ という2つの値をとることができる．s^z が $+\frac{1}{2}$ の値をとるときの状態は $|+\frac{1}{2}\rangle$，また，$-\frac{1}{2}$ という値をとるときの状態は $|-\frac{1}{2}\rangle$ である．

このように量子力学では，

“演算子で表される物理量と物理系の状態を表す状態ベクトルとはセットになっている”

ことがわかるであろう．

1.4 固有値問題とエルミート演算子

1.4.1 固有値問題

固有値方程式 (1.3.50) の固有値 α_n とケット $|\alpha_n\rangle$ を求めることを固有値問題という．(1.2.42) が 1 つの例であるが，演算子は状態ベクトルを別の状態ベクトルに変換する．すなわち，一般的には

$$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle \tag{1.4.53}$$

となる．ところが (1.3.50) では，状態 $|\alpha_n\rangle$ に演算子 A が演算した結果は，元の $|\alpha_n\rangle$ のままであり，大きさが α_n 倍となっただけである．通常は A の作用によって状態ベクトルは (1.4.53) のように別物となるが，A を作用させても変わらない状態（固有状態）およびそのときの比例係数（固有値）を探せ，というのが (1.3.50) の固有値問題である．演算子 A を与えたとき，このようにして得られた状態 $|\alpha_n\rangle$ に対応する固有値 α_n をもって，A が実際にとり得る値としよう，というのが量子力学の主張である．その可否は実験によって検証されることになる．演算子 A を物理量に対応させるのであるから，A の実際にとり得る値 α_n は実数でなければならない．実験を行って観測される物理量の測定値はすべて実数だからである．この当然の要求から，A にはある制限が課される．以下にこれを見よう．その前に準備が必要である．

1.4.2 ブラ・ケットとエルミート共役

任意のケット $|\psi\rangle$ に対応するブラは $\langle\psi|$ であった．この対応関係を

$$\langle\psi| \longleftrightarrow |\psi\rangle \tag{1.4.54}$$

とかく．また，任意の複素数を c としたとき，ケット $c|\psi\rangle$ に対応するブラ

を $\langle\psi|c^*$ と定める．ここに c^* は c の複素共役である．すなわち，

$$\langle\psi|c^* \longleftrightarrow c|\psi\rangle \tag{1.4.55}$$

の対応関係がある．さらに，演算子 A によって変換されたケット $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$ に対応するブラを $\langle\psi'| = \langle\psi|A^\dagger$ とかく．すなわち，

$$\langle\psi|A^\dagger \longleftrightarrow A|\psi\rangle \tag{1.4.56}$$

であるが，この $A^\dagger$ はまだ正体不明である．

$A^\dagger$ を決めるには次のようにすればよい．まず (1.4.55) からわかるように，ケットとブラの係数の間には複素共役の関係がある．そこで，(1.4.55) のブラ $\langle\psi|c^*$ と任意のケット $|\phi\rangle$ の内積をとれば $\langle\psi|c^*|\phi\rangle$ という数が得られる．他方，(1.4.55) のケット $c|\psi\rangle$ と，ブラ $\langle\phi|$ との内積をとると $\langle\phi|c|\psi\rangle$ という数が得られる．これら 2 つの数が互いに複素共役であるとすれば，(1.4.55) とは整合している．すなわち，

$$(\langle\phi|c|\psi\rangle)^* = \langle\psi|c^*|\phi\rangle \tag{1.4.57}$$

と定めることにする．(1.4.57) で $c=1$ ととれば

$$(\langle\phi|\psi\rangle)^* = \langle\psi|\phi\rangle \tag{1.4.58}$$

が成り立つ．同様のことを (1.4.56) に行うと，

$$(\langle\phi|A|\psi\rangle)^* = \langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle \tag{1.4.59}$$

となる．(1.4.59) より，$A^\dagger$ は A から定まることがわかる．この $A^\dagger$ を A のエルミート共役演算子（Hermite conjugate operator）という．

1.4.3 再び固有値問題

(1.3.50) の固有値方程式を再びかくと

$$A|\alpha_n\rangle = \alpha_n|\alpha_n\rangle$$

である．(1.3.50) の両辺と $\langle\alpha_n|$ との内積をとれば，

$$\langle\alpha_n|A|\alpha_n\rangle = \alpha_n\langle\alpha_n|\alpha_n\rangle \tag{1.4.60}$$

となる．(1.4.60) の両辺の複素共役をとって (1.4.58), (1.4.59) を使えば，

$$\langle\alpha_n|A^\dagger|\alpha_n\rangle = \alpha_n^*\langle\alpha_n|\alpha_n\rangle \tag{1.4.61}$$

を得る．もし A が

$$A^\dagger = A \tag{1.4.62}$$

という性質をもっているなら，(1.4.60), (1.4.61) より

$$\alpha_n^* = \alpha_n \tag{1.4.63}$$

となる．また，$\alpha_n^* = \alpha_n$ であれば，$A^\dagger = A$ となる．(1.4.62) を満足する A を**エルミート演算子**（Hermitian operator）という．以上まとめると，

“物理量を表す演算子 A が実際にとる値 α_n は実数である．このとき A はエルミート演算子であり，$A^\dagger = A$ が成り立つ”

ことがわかる．

次に $\langle\alpha_n|\alpha_k\rangle = 0$ $(\alpha_n \neq \alpha_k)$ を示そう．前と同様にして (1.3.50) より

$$\langle\alpha_k|A|\alpha_n\rangle = \alpha_n\langle\alpha_k|\alpha_n\rangle \tag{1.4.64}$$

を得る．(1.4.64) の両辺の複素共役をとり，A がエルミート演算子の場合を考えると，(1.4.62), (1.4.63) が成り立っているので，

$$\langle\alpha_n|A|\alpha_k\rangle = \alpha_n\langle\alpha_n|\alpha_k\rangle \tag{1.4.65}$$

となる．他方，(1.4.64) で n と k とを入れ替えると，

$$\langle\alpha_n|A|\alpha_k\rangle = \alpha_k\langle\alpha_n|\alpha_k\rangle \tag{1.4.66}$$

が成り立つ．したがって，(1.4.65), (1.4.66) より

$$\langle\alpha_n|\alpha_k\rangle = 0\ (\alpha_n \neq \alpha_k) \tag{1.4.67}$$

である．すなわち，

“物理量 A の異なる固有値に属する状態ベクトルは互いに直交する”

ことがわかった．

また $|\alpha_n\rangle$ の大きさを $\langle\alpha_n|\alpha_n\rangle = 1$ とすることができるので，

$$\langle\alpha_n|\alpha_k\rangle = \delta_{nk} \tag{1.4.68}$$

である．

以上まとめて，

“物理量 A の固有状態 $|\alpha_n\rangle$ は正規直交系を成す”

のである．

したがってスピン系の場合，$s_z^\dagger = s_z$ であるから，(1.2.28)，(1.2.29)，すなわち，(1.2.30) が成立する．

1.5 確率解釈と物理量の期待値

演算子 A で表される物理量の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，また固有状態を $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \cdots$ とする．前節で示したように固有状態は正規直交系を成し，かつ完全性を満たしているとしよう．このとき物理系の任意の状態は (1.2.48) のように表される．すなわち，

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k|\alpha_k\rangle \tag{1.5.69}$$

が成り立つ．ここで状態 $|\psi\rangle$ における物理量 A の期待値，$\langle\psi|A|\psi\rangle$，を導入し，これを $\langle A\rangle$ とかく．すなわち，

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle \tag{1.5.70}$$

である．(1.5.70) に (1.5.69) を代入すると，A の期待値は，

$$\langle A \rangle = \sum_{k,\ell} c_k^* c_\ell \langle \alpha_k | A | \alpha_\ell \rangle \tag{1.5.71}$$

$$= \sum_k |c_k|^2 \alpha_k \tag{1.5.72}$$

となる．ここで，

$$|c_k|^2 = |\langle \alpha_k | \psi \rangle|^2 \tag{1.5.73}$$

である．これらの結果を得る際に固有値問題の関係式 (1.3.50) および (1.4.68) を用いている．次に (1.5.72) で表される $\langle A \rangle$ を期待値とよぶ理由を考えてみよう．

物理量 A の固有値方程式 (1.3.50) が語っていることは，A が実際に取り得る値は α_1, α_2, $\cdots$ のうちのどれかである，ということである．このような例は確率問題の中に見出される．たとえばサイコロ投げを考え，出る目の数を表す変数（確率変数）を X としよう．サイコロを投げるまでは X の値は決定されない．投げた（試行を行った）結果，得られた値（実現値）を x_1, x_2, $\cdots$ とかく．サイコロ投げの場合は，$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\cdots$, $x_6 = 6$ である．x_1 という値が出る確率を w_1 とし，x_2 が出る確率を w_2, $\cdots$, とすると，確率変数の期待値 $\langle X \rangle$ は，

$$\langle X \rangle = \sum_k w_k x_k \tag{1.5.74}$$

となる．(1.5.74) は平均値ともよばれる．量子力学における期待値の表式 (1.5.72) と確率の問題における期待値の表式 (1.5.74) とを比較すると，

$$\alpha_k \longleftrightarrow x_k, \tag{1.5.75}$$

$$|c_k|^2 \longleftrightarrow w_k \tag{1.5.76}$$

という対応が見出される．すなわち，$|c_k|^2$ は状態 $|\psi\rangle$ にある系を観測して，その系を状態 $|\alpha_k\rangle$ に見出す確率である，と解釈できれば，(1.5.72) で与えられる

$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ は，状態 $|\psi\rangle$ における物理量 A の期待値（平均値）となる．

以上，まとめると，

"状態 $|\Psi\rangle$ にある物理系を観測して，その系を状態 $|\Phi\rangle$ に見出す確率は，

$$|\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 \tag{1.5.77}$$

である"

となり，これを量子力学の確率解釈という．

1.6 エンタングルした状態

2つ以上の要素から成る物理系の状態を考えよう．構成要素が2つという最も単純な場合の例としてスピン系を取り上げる．

1.6.1 Bell 状態

2つのスピンをそれぞれ A および B とよぶ．1.2 節より，1つのスピンのとり得る状態はスピン上向き状態 $|+\rangle (= |+\frac{1}{2}\rangle)$，スピン下向き状態 $|-\rangle (= |-\frac{1}{2}\rangle)$ であるので，スピン系全体の状態として，たとえば，

$$|+\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |+\rangle_{\mathrm{B}} \tag{1.6.78}$$

が考えられる．(1.6.78) は"スピン A は上向き状態にあり，かつスピン B も上向き状態にある"という意味である．この例では全体の状態ベクトルが個々の構成要素の"積"であり，記号 $\otimes$ で表されている．

2つのスピンから成る状態は，いつでも (1.6.78) のようにかけるわけではなく，

$$|\Phi^+\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |+\rangle_{\mathrm{B}} + |-\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |-\rangle_{\mathrm{B}} \right) \tag{1.6.79}$$

のように，全体が A の状態と B の状態との単純な積では表されないものがある．このような状態をエンタングルした状態（entangled state），あるいはもつれ合った状態，とよぶ．2つのスピンがもつれ合った状態は (1.6.79) の他に

$$|\Phi^-\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |+\rangle_{\mathrm{B}} - |-\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |-\rangle_{\mathrm{B}}\right), \tag{1.6.80}$$

$$|\Psi^+\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |-\rangle_{\mathrm{B}} + |-\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |+\rangle_{\mathrm{B}}\right) \tag{1.6.81}$$

および

$$|\Psi^-\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |-\rangle_{\mathrm{B}} - |-\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |+\rangle_{\mathrm{B}}\right) \tag{1.6.82}$$

がある．(1.6.79)-(1.6.82) の 4 つの状態を **Bell**（ベル）状態とよぶ．これら 4 つの状態が正規直交系を成すことはただちにわかる．また，完全性の条件，

$$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| + |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| = I_{\mathrm{AB}} \tag{1.6.83}$$

を満足することは，(1.6.79)-(1.6.82) を使って (1.6.83) の左辺を計算した結果と，

$$I_{\mathrm{A}} = |+\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle+| + |-\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle-| \tag{1.6.84}$$

および

$$I_{\mathrm{B}} = |+\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle+| + |-\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle-| \tag{1.6.85}$$

を用いて，(1.6.83) の右辺，

$$I_{\mathrm{AB}} = I_{\mathrm{A}} \otimes I_{\mathrm{B}} \tag{1.6.86}$$

を計算した結果とが一致することから了解されよう．表記が複雑になるので，(1.6.83) では A, B の添え字をかいていない．これら 4 つの状態のうち，$|\Psi^+\rangle_{\mathrm{AB}}$ は 3 重項状態とよばれるもののうちの 1 つであり，また $|\Psi^-\rangle_{\mathrm{AB}}$ は 1 重項状態として古くから知られている．これらのもつれ合った状態は，古典物理学には登場しない量子力学に特有のものであり，量子力学の本質と深くかかわっていることが徐々に認識されるようになってきた．さらに近年に至り，量子情報という新たな研究分野の進展とともに，もつれ合った状態が量子計算，量子情報処理，量子通信と

いった応用分野においてもきわめて重要な役割を担っていることが明らかにされている．本書の第 II 部においても，その一端が取り上げられている．

1.7 1 次元調和振動子

スピン系と並んで，単純だが重要な物理系として 1 次元調和振動子がある．バネにつながれた質量 m の粒子を，自然の長さの位置から少しずらして放せば，単振動を行う．この系を量子力学で扱ってみよう．

1.7.1 エネルギー固有値問題

1 次元調和振動子が取り得るエネルギーの値 E_n を求めるには，固有値方程式，

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \tag{1.7.87}$$

を解けばよい．ここで H はエネルギーに対応する演算子で，ハミルトニアン (Hamiltonian) とよばれる．質量 m の 1 次元調和振動子の場合，全エネルギーは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーとの和であるから，ハミルトニアンは，

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{1.7.88}$$

で与えられる．ここで，q は振動子の位置座標を表す演算子であり，p は運動量を表す演算子である．(1.7.88) では，後の便宜のためにバネ定数 k を，$k = m\omega^2$ とおいている．このとき，ω は角振動数を表す．

次のことに注意しよう．演算子は一般的に (1.2.41) のようにかけるが，問題を単純化して，

$$A = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| \tag{1.7.89}$$

および

$$B = |\alpha_2\rangle\langle\alpha_1| \tag{1.7.90}$$

という 2 つの演算子を考えよう．このとき，状態 $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$ が規格化されていれば，

$$AB = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|, \tag{1.7.91}$$

$$BA = |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \tag{1.7.92}$$

となり，この単純な例からわかるように，AB と BA とは一般には等しくはない．そこで，差を表す

$$[A, B] = AB - BA \tag{1.7.93}$$

という記号を導入して，これを A と B の交換関係とよぶ．すなわち，

“量子力学における演算子は一般的には互いに交換しない”

のである．交換関係がゼロとなる特別な場合には，A と B とは互いに可換であるという．位置を表す演算子 q と，運動量を表す演算子 p との間には，交換関係，

$$[q, p] = i\hbar \tag{1.7.94}$$

が成り立つ．(1.7.94) の右辺で，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{1.7.95}$$

である．ここに h は Planck（プランク）定数を表し，

$$h \cong 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$$

で与えられる．(1.7.94) を正準交換関係という．この関係式の正しさは，(1.7.94) に基づいて導いた理論の結果が実験と整合していること，並びに理論内部で矛盾なく首尾一貫していることから受け入れられている．当面の目標は (1.7.87) を解いて E_n と $|\phi_n\rangle$ を求めることである．このために次のような変数変換を行う．すなわち，

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q) \tag{1.7.96}$$

とおけば，a のエルミート共役な演算子 $a^\dagger$ は

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q) \tag{1.7.97}$$

となる．ここで，$q^\dagger = q$, $p^\dagger = p$ という物理量に対する関係を使っている．正準交換関係 (1.7.94) を使うと，a, $a^\dagger$ の交換関係は

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1 \tag{1.7.98}$$

となる．また，(1.7.96), (1.7.97) を逆に解いて q, p を a, $a^\dagger$ で表し，ハミルトニアン (1.7.88) に代入すると

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{1.7.99}$$

という単純な形となる．(1.7.99) を導く際に，(1.7.98) から得られる関係式，$aa^\dagger = a^\dagger a + 1$，を使っている．(1.7.99) を見ると，$H$ を決定する演算子は

$$N = a^\dagger a \tag{1.7.100}$$

のみであることがわかる．したがって，N に対する固有値方程式，

$$N|n\rangle = n|n\rangle \tag{1.7.101}$$

が解ければ，(1.7.87) の固有値方程式も解けて，

$$|\phi_n\rangle = |n\rangle \tag{1.7.102}$$

および

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{1.7.103}$$

と定まる．

まず (1.7.101) から得られる以下のことに注意しよう．すなわち，(1.7.100) を用いると，

$$\langle n|N|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = n\langle n|n\rangle \tag{1.7.104}$$

である．ここで，

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = (\text{状態ベクトル } a|n\rangle \text{ の長さの 2 乗}) \geq 0 \tag{1.7.105}$$

であるから，$n \geq 0$（すなわち，n は非負）であることがわかる．ただし，状態 $|n\rangle$ はゼロではないこと（$\langle n|n\rangle > 0$）を用いている．大きさをもたない状態 $|n\rangle$ には興味がないからである．

演算子 N の固有値 n が非負であることがわかったので，まず $n = 0$ のときを考えると，(1.7.104) より，

$$a|n=0\rangle = 0 \tag{1.7.106}$$

が得られる．状態ベクトルの長さの 2 乗がゼロとなるのは，状態ベクトルそのものがゼロのときだからである．

次に $n > 0$ の場合を考える．このとき (1.7.104) より，$a|n\rangle \neq 0$ である．また，任意の演算子 A, B, C に対する関係式，

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B \tag{1.7.107}$$

から得られる

$$[N, a] = -a \tag{1.7.108}$$

を用いれば，状態 $a|n\rangle$ に対して，

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \tag{1.7.109}$$

が成り立つ．すなわち，状態 $a|n\rangle$ は N の固有状態であり，その固有値は $(n-1)$ である．(1.7.104) より N の固有値は非負であるから $(n-1) \geq 0$ である．同様にして，

$$Na^2|n\rangle = (n-2)a^2|n\rangle \tag{1.7.110}$$

などが成り立つ．

これまでのところ，(1.7.104) では $n \geq 0$ がわかっているだけであるから，n の最小値がゼロなのか，あるいは有限の正の値なのかはわからない．また，n は非負の実数であればよいのか，あるいは非負の整数といった特別な値であるのかもわかっていない．以下でこのことを明らかにしよう．

まず，正の数 n は非整数であって，2 つの正の整数 m と $m+1$ の間にあると仮定する．この仮定の下では $n \neq 0$ なので $a|n\rangle \neq 0$ が成り立つ．また (1.7.109) および (1.7.110) を一般化すれば，状態 $a^m|n\rangle$ は演算子 N の固有状態であり，その固有値は正の値 $(n-m)$ となることが了解されよう．一方，演算子 N の正の固有値 n に対して (1.7.109) が成立しているのであるから，正の固有値 $(n-m)$ をもつ状態 $a^m|n\rangle$ に対しても，(1.7.109) で $|n\rangle \to a^m|n\rangle$, $(n-1) \to (n-m-1)$ という置き換えを行った式，

$$Naa^m|n\rangle = (n-m-1)aa^m|n\rangle \tag{1.7.111}$$

が成立するはずである．このとき N の固有値 $(n-m-1)$ は非負，すなわち $n \geq m+1$ でなければならない．このことは最初の仮定 $n < m+1$ と矛盾する．したがって，n は非整数である，とした最初の仮定は捨てねばならない．

以上より，演算子 N の固有値 n は非負の整数値をとることが了解されよう．そこで，(1.7.106) で与えられる状態 $|n=0\rangle$ を基底状態とよぶことにする．n がゼロより小さい状態は存在しない．

次に $n > 0$ の状態 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を定めよう．それにはまず，(1.7.108) と類似の関係，

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \tag{1.7.112}$$

を用いることにより,

$$Na^\dagger|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle \tag{1.7.113}$$

が得られることに注意しよう．すなわち，状態 $a^\dagger|n\rangle$ は演算子 N の固有状態であり，その固有値は $(n+1)$ である．(1.7.113) で $n=0$ とおけば $a^\dagger|0\rangle$ は固有値 1 の状態であるから,

$$|1\rangle = c_1 a^\dagger|0\rangle \tag{1.7.114}$$

が得られる．係数 c_1 は後で決めることにする．(1.7.113) で同様にして $n=1$ とおくと,

$$|2\rangle = c_2 a^\dagger|1\rangle = c_1 c_2 (a^\dagger)^2|0\rangle \tag{1.7.115}$$

となる．

以下この計算をくり返すと,

$$|n\rangle = c_1 c_2 \cdots c_n (a^\dagger)^n|0\rangle \tag{1.7.116}$$

となる．

係数 $c_1, c_2, \cdots$ を決めるには状態ベクトルの規格化条件を使う．まず (1.7.114) より,

$$\langle 1|1\rangle = |c_1|^2\langle 0|aa^\dagger|0\rangle = |c_1|^2\langle 0|(N+1)|0\rangle = |c_1|^2\langle 0|0\rangle = |c_1|^2 \equiv 1 \tag{1.7.117}$$

となり，$|c_1| = 1$ である．ここで，$\langle 0|0\rangle = 1$ とした．以下この計算をくり返すと $|c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|c_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cdots$ が得られる．係数の未定の位相を $c_n = |c_n|$ となるように定めれば,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \tag{1.7.118}$$

を得ることができる．

(1.7.118) より，交換関係 $[a,\ a^\dagger]=1$ を用いて，

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{1.7.119}$$

という関係式を導くことができる．

1.7.2 生成・消滅演算子とエネルギー量子

演算子 $N(=a^\dagger a)$ の固有値 n は，ゼロを含む正の整数値であった．一方，エネルギー固有値 E_n は (1.7.103) で与えられているから，エネルギーは低い順に，

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega,\ E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega,\ E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega, \cdots \tag{1.7.120}$$

となる．(1.7.120) で隣り合うエネルギーの差は $\hbar\omega$ である．すなわち，エネルギーの最小単位は $\hbar\omega$ で与えられ，このエネルギーを担っているものを**量子**（quantum）とよぶ．したがって，$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ というエネルギー状態には，量子が n 個存在して，それぞれの量子は $\hbar\omega$ のエネルギーをもつのである．

この視点から (1.7.101) を解釈すれば，演算子 $N(=a^\dagger a)$ は量子の個数を表し，状態 $|n\rangle$ には量子が n 個存在することになる．(1.7.119) は，n 個の量子から成る状態 $|n\rangle$ に a が作用した結果，量子が 1 個消されて状態 $|n-1\rangle$ となった，ということを示している．また，$a^\dagger$ は量子を 1 個つくり出す演算子であることがわかる．したがって，a を**消滅演算子**（annihilation operator），$a^\dagger$ を**生成演算子**（creation operator），そして N を**個数演算子**（number operator）とよぶ．状態 $|0\rangle$ には量子がいないので，**真空**（vacuum）という．真空に消滅演算子を演算すると，消すべき量子がいないのでゼロとなる．すなわち，(1.7.106) が成り立つ．さらに，(1.7.118) によれば，真空に生成演算子を n 個作用させると，n 個の量子を含む状態 $|n\rangle$ となることがわかる．

1.7.3 コヒーレント状態

調和振動子の状態を記述するために，個数演算子 N の固有状態である $|n\rangle$ を用

いてきたが，別のやり方もある．すなわち，(1.7.96) で導入された消滅演算子 a の固有値方程式，

$$a|z\rangle = z|z\rangle \tag{1.7.121}$$

を考えよう．(1.7.96), (1.7.97) より，$a^\dagger \neq a$ であるから，a はエルミート演算子ではない．したがって (1.7.121) の固有値 z は一般に複素数となる．

状態 $|n\rangle$ の完全性，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I \tag{1.7.122}$$

を用いると

$$|z\rangle = I|z\rangle \tag{1.7.123}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} d_n|n\rangle \tag{1.7.124}$$

と表すことができる．ここで $d_n = \langle n|z\rangle$ である．(1.7.121) の両辺に (1.7.124) を代入して，(1.7.119) を用いると，

$$d_{n+1} = \frac{z}{\sqrt{n+1}}d_n \tag{1.7.125}$$

という関係式を得る．これを解くと

$$d_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}d_0 \tag{1.7.126}$$

であり，d_0 は規格化条件 $\langle z|z\rangle = 1$ より，

$$|d_0| = \mathrm{e}^{-|z|^2/2} \tag{1.7.127}$$

となる．これらを用いると，

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1.7.128}$$

が固有値方程式 (1.7.121) の解となる．(1.7.128) をコヒーレント状態（coherent state）とよぶ．“コヒーレント”とは，光学の分野では“干渉可能な”という意味で用いられ，実際，レーザー光の性質は $|z\rangle$ を用いて表されることが多い．また，量子系を記述する方法論の 1 つに，位相空間の方法というものがあり，本書の第 II 部でも使われているが，そこではコヒーレント状態が重要な役割を演じている．

状態 $|z\rangle$ には (1.7.128) の他にもっと簡潔な表式がある．すなわち，

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle \tag{1.7.129}$$

である．ここで，

$$D(z) = \mathrm{e}^{za^\dagger - z^* a} \tag{1.7.130}$$

は**並進演算子**（displacement operator）とよばれる．また，$|0\rangle = |n=0\rangle$ である．(1.7.129) が (1.7.128) と等しいことは，2 つの演算子 A, B に対して成り立つ関係式，

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A} \mathrm{e}^{B} \mathrm{e}^{-[A,B]/2} \tag{1.7.131}$$

を用いればよい．(1.7.131) は，$[A, B]$ が A および B と交換可能であれば成り立ち，Baker-Hausdorf（ベーカー・ハウスドルフ）の公式とよばれる．

以上のやり方では粒子の位置に関する情報が明らかになっていない．位置を表す演算子は q であるので，その実現値を x 座標上にとることにする．すなわち，対応する固有値問題は，

$$q|x\rangle = x|x\rangle \tag{1.7.132}$$

である．1.5 節の確率解釈によれば，物理系が状態 $|\psi\rangle$ にあるとき，粒子を位置 x に見出す確率は，

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 \tag{1.7.133}$$

ということであった．1.5 節では固有値が離散的（飛び飛び）な値をとる場合を考えていたのであるが，粒子の位置 x のように連続的固有値の場合には以下の手直しが必要である．すなわち，x の微小範囲 dx を考え，粒子が x と $x+dx$ の間に存在する確率が，

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 dx \tag{1.7.134}$$

であるとする．このとき $|\langle x|\psi\rangle|^2$ は位置 x 近傍における単位長さ当たりの確率であり，**確率密度**とよばれる．また，

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \tag{1.7.135}$$

とかき，この $\psi(x)$ を $|\psi\rangle$ の座標表示，あるいは **Schrödinger の波動関数**とよぶ．波動関数 $\psi(x)$ は調和振動子に限らず，1 次元粒子系の位置に関する情報を与える．3 次元系に対しては $\psi(x,y,z)$ とすればよい．ここで例題として，1 次元調和振動子の最低エネルギー状態（基底状態）の波動関数を求めてみよう．

まず (1.7.135) より，基底状態 $|n=0\rangle$ に対する波動関数は，

$$\psi_0(x) = \langle x|n=0\rangle \tag{1.7.136}$$

である．一方，基底状態に対しては，

$$a|n=0\rangle = 0 \tag{1.7.137}$$

が成り立つ．ここで，(1.7.96) より，

$$a = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q + \frac{ip}{m\omega}\right), \tag{1.7.138}$$

を思い出すと，(1.7.137) より，

$$\langle x|q|n=0\rangle + \frac{i}{m\omega}\langle x|p|n=0\rangle = 0 \tag{1.7.139}$$

であり，(1.7.132) を用いると，

$$m\omega x\psi_0(x) + i\langle x|p|n=0\rangle = 0 \tag{1.7.140}$$

を得る．(1.7.140) の左辺第 2 項を計算するためには，以下の準備が必要である．

任意の状態 $|\psi\rangle$ と q の固有状態 $|x\rangle$ に対して，正準交換関係 (1.7.94) より

$$x\langle x|p|\psi\rangle - \langle x|pq|\psi\rangle = i\hbar\langle x|\psi\rangle \tag{1.7.141}$$

を得る．(1.7.141) の左辺が右辺に等しくなるためには，

$$\langle x|p|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) \tag{1.7.142}$$

であればよい．このことは (1.7.142) と，

$$\langle x|pq|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|q|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\{x\psi(x)\} \tag{1.7.143}$$

を用いればただちに了解されよう．これを一般化すれば，3 次元系に対して，

$$\langle x,y,z|\boldsymbol{p}|\psi\rangle = -i\hbar\nabla\psi(x,y,z) \tag{1.7.144}$$

となる．ここで $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$，$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ である．これらの結果を (1.7.140) に用いれば，

$$m\omega x\psi_0(x) + \hbar\frac{d}{dx}\psi_0(x) = 0 \tag{1.7.145}$$

を得る．微分方程式 (1.7.145) は変数分離法によりただちに解けて，

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{-m\omega x^2/2\hbar} \tag{1.7.146}$$

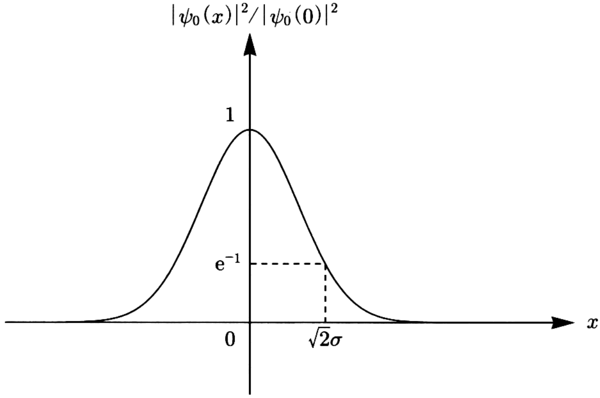


図 **1.2**　1 次元調和振動子の基底状態を表す $\psi_0(x)$ の絶対値の 2 乗は粒子の存在確率に比例する．

となる．(1.7.146) の絶対値の 2 乗を図示すると，図 1.2 のようになる．この図より次のことがわかる．すなわち，1 次元調和振動子の基底状態では，粒子はポテンシャルエネルギーの底 $(x=0)$ だけでなく，その近くにも，有限の存在確率をもつのである．位置のゆらぎ，すなわち，標準偏差，

$$\sigma = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2} \tag{1.7.147}$$

を計算してみると，$\langle q \rangle = 0$ であり，かつ

$$\langle q^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_0(x)|^2 x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{1.7.148}$$

と求められるので，$\sigma = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ となる．図 1.2 に示されているように，$|\psi_0(x)|^2$ の $x = \sigma$ における値は原点における値の e^{-1} である．すなわち，1 次元調和振動子の基底状態でも，粒子は $x = 0$ の近くでゆらいでいるのである．このことをゼロ点振動とよぶ．

1.8 不確定性関係

物理系の状態が $|\psi\rangle$ であるとき，物理量 A および B の期待値をそれぞれ

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \tag{1.8.149}$$

および

$$\langle B\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle \tag{1.8.150}$$

とかく．また，物理量 A の平均値からのズレを表す演算子は

$$\Delta A = A - \langle A\rangle \tag{1.8.151}$$

であり，物理量 A の標準偏差 σ_{A} は ΔA を用いて

$$\sigma_{\mathrm{A}}^2 = \langle(\Delta A)^2\rangle \tag{1.8.152}$$

$$= \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \tag{1.8.153}$$

と表される．B に対しても同様な関係式が成り立つ．このとき 2 つの物理量 A, B に対する関係式

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{A}}^2\sigma_{\mathrm{B}}^2 &\geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta A,\ \Delta B\}\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + |\frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle|^2 \end{aligned}\tag{1.8.154}$$

が成立する．ここで，$[A,B] = AB - BA$ は交換関係，$\{A,B\} = AB + BA$ は反交換関係である．以下，(1.8.154) を示そう．

1.8.1 準備：Schwarz の不等式

任意の状態ベクトル $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ に対して不等式

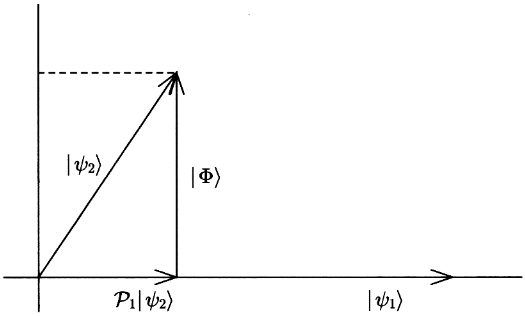


図 1.3 $|\psi_2\rangle$ を $|\psi_1\rangle$ に平行な成分と直交する成分に分解.

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 \leq \langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_2\rangle \tag{1.8.155}$$

が成り立つ．このことを証明するために，状態 $|\psi_1\rangle$ への射影演算子 $\mathcal{P}_1$,

$$\mathcal{P}_1 = \frac{|\psi_1\rangle\langle\psi_1|}{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} \tag{1.8.156}$$

を導入する．$\mathcal{P}_1$ は $(\mathcal{P}_1)^2 = \mathcal{P}_1$ という性質をもっている．したがって状態ベクトル $\mathcal{P}_1|\psi_2\rangle$ は，$|\psi_2\rangle$ の $|\psi_1\rangle$ 方向成分を表す．これを図示すると図 1.3 のようになる．図中の状態ベクトル $|\Phi\rangle$ は，$|\psi_2\rangle$ の $|\psi_1\rangle$ への直交成分であり

$$|\Phi\rangle = |\psi_2\rangle - \mathcal{P}_1|\psi_2\rangle \tag{1.8.157}$$

$$\equiv \mathcal{Q}_1|\psi_2\rangle \tag{1.8.158}$$

で与えられる．ここで $\mathcal{Q}_1 = 1 - \mathcal{P}_1$ は $(\mathcal{Q}_1)^2 = \mathcal{Q}_1$ を満たしている．このことおよび射影演算子 $\mathcal{P}_1$ および $\mathcal{Q}_1$ はエルミート演算子であることを用いれば,

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\Phi\rangle &= \langle\psi_2|(\mathcal{Q}_1)^2|\psi_2\rangle \\ &= \langle\psi_2|\mathcal{Q}_1|\psi_2\rangle \\ &= \langle\psi_2|\psi_2\rangle - \frac{|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} \\ &\geq 0\end{aligned} \tag{1.8.159}$$

より (1.8.155) の **Schwarz**（シュワルツ）の不等式が導かれる．ここで状態ベクトル $|\Phi\rangle$ の“長さの 2 乗”$\langle\Phi|\Phi\rangle$ が非負であることを用いている．(1.8.159) で等号が成り立つのは $|\Phi\rangle=0$ のとき，すなわち $|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ とが線形従属の場合である．

Schwarz の不等式 (1.8.155) において $|\psi_1\rangle=A|\psi\rangle$, $|\psi_2\rangle=B|\psi\rangle$ とおけば

$$|\langle AB\rangle|^2 \leq \langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \tag{1.8.160}$$

である．ここで $\langle\ \bullet\ \rangle=\langle\psi|\ \bullet\ |\psi\rangle$ という記法を用いている．2 つの演算子 A, B の積は交換関係と反交換関係で表される．すなわち，

$$AB=\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{2}\{A,B\} \tag{1.8.161}$$

という関係式が成り立つ．したがって (1.8.160) の左辺に登場する $\langle AB\rangle$ は交換関係および反交換関係の期待値で表される．ここでエルミート共役の性質 (1.4.59) を思い起こせば

$$(\langle\phi|A|\psi\rangle)^*=\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle \tag{1.8.162}$$

が成り立っている．この関係式で $|\phi\rangle=B|\psi\rangle$ とおけば

$$\langle BA\rangle^*=\langle AB\rangle \tag{1.8.163}$$

を得る．ここで A, B は物理量を表すエルミート演算子であること ($A^\dagger=A$, $B^\dagger=B$) を使っている．同様にして，

$$\langle AB\rangle^*=\langle BA\rangle \tag{1.8.164}$$

も成り立つ．したがって (1.8.163), (1.8.164) の辺々を引き算して

$$\langle[A,B]\rangle^*=-\langle[A,B]\rangle \tag{1.8.165}$$

を得る．同様にして反交換関係の期待値に対しては

$$\langle\{A,B\}\rangle^* = \langle\{A,B\}\rangle \tag{1.8.166}$$

である．これより，$\langle[A,B]\rangle =$ 純虚数，$\langle\{A,B\}\rangle =$ 実数，であることが了解されよう．以上の議論は，

$$A \ \rightarrow \ \Delta A, \ B \ \ \rightarrow \ \Delta B$$

と置き換えても成り立つので，(1.8.160) は

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta A,\Delta B\}\rangle|^2 \tag{1.8.167}$$

となり，ただちに関係式 (1.8.154) が得られる．

調和振動子の位置を表す演算子 q と運動量を表す演算子 p との間には (1.7.94) の正準交換関係，

$$[q,p] = i\hbar \tag{1.8.168}$$

が成り立っていた．この関係式は調和振動子のみならず，一般的に位置と運動量の間に成立する．

したがって，(1.8.167), (1.8.168) より，

$$\sigma_q \cdot \sigma_p \geq \frac{1}{2}\hbar \tag{1.8.169}$$

を得る．ここで (1.8.167) の右辺第 2 項が非負であることを用いている．

(1.8.169) を位置と運動量とに関する**不確定性関係**とよぶ．この関係式によれば，粒子の位置と運動量のゆらぎは，それぞれ

$$\sigma_q = \sqrt{\langle(\Delta q)^2\rangle} \tag{1.8.170}$$

および

$$\sigma_p = \sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} \tag{1.8.171}$$

で与えられ，それらの積には Planck 定数で指定される下限が存在する．

これは古典物理学にはない著しい特徴であって，q と p とが非可換であるという性質に基づいている*1.

1.8.2 射影演算子

Schwarz の不等式を導く際に，射影演算子 $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{Q}_1$ を用いて $|\psi_2\rangle$ の $|\psi_1\rangle$ 方向成分 $\mathcal{P}_1|\psi_2\rangle$ およびそれと直交する成分 $\mathcal{Q}_1|\psi_2\rangle$ を構成した．このやり方は，直交しないベクトルの組から直交するベクトルの組を構成する **Gram-Schmidt**（グラム・シュミット）の方法とよばれるものの一例となっている．このように，目的に応じて適当な射影演算子 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を導入すると，重要な成分を抜き出したり（第 2 章，第 3 章），あるいは不要な成分を消去する（第 3 章）ことができる．ことに第 3 章で展開される方法論は非平衡系を扱う際の基礎となっている．

1.9 物理系の時間発展

量子系は，系の状態を表す状態ベクトルと物理量を表す演算子で記述される．そして多くの場合，エネルギー固有値問題

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \tag{1.9.172}$$

が解ければ量子系の基本的な性質を求めることができる．

1.9.1 Schrödinger 方程式

では，量子系は時間とともに，どのように変化するであろうか．時刻 t における量子系の状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle$ としたとき，$|\psi(t)\rangle$ の時間変化を記述する基本方程式の作り方はいろいろあるだろうが，その定常状態（時間変化をしない状態）が (1.9.172) を満たすように構成すればよいであろう．

*1 厳密なことを言えば，(1.8.169) は観測による効果を考慮していないので，Heisenberg が思考実験を用いて最初に導いた不確定性関係と同等というわけではない．

エネルギー固有値方程式 (1.9.172) の解が完全性を満たすとすれば，$|\psi(t)\rangle$ は $|\phi_n\rangle$ を用いて

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)|\phi_n\rangle \tag{1.9.173}$$

と展開できる．時間を表す変数 t での微分を $\dot{C}_n(t)$ のようにかくと，(1.9.173) より

$$|\dot{\psi}(t)\rangle = \sum_n \dot{C}_n(t)|\phi_n\rangle \tag{1.9.174}$$

であるが，$C_n(t)$ が

$$\dot{C}_n(t) = -\frac{i}{\hbar}E_n C_n(t) \tag{1.9.175}$$

を満たせば，すなわち

$$C_n(t) = C_n(0)\mathrm{e}^{-iE_n t/\hbar} \tag{1.9.176}$$

であれば，(1.9.174) より

$$i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = \sum_n C_n(t)E_n|\phi_n\rangle \tag{1.9.177}$$

$$= \sum_n C_n(t)H|\phi_n\rangle \tag{1.9.178}$$

となる．ここで，状態 $|\phi_n\rangle$ が (1.9.172) の解であることを使っている．したがって，

$$i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{1.9.179}$$

が成り立つ．この (1.9.179) は量子系の時間発展を定める基本式で，**時間に依存する Schrödinger 方程式**（time dependent Schrödinger equation）とよばれる．また，エネルギー固有値問題を与える (1.9.172) を，**時間に依存しない Schrödinger 方程式**（time independent Schrödinger equation）という．

1.9.2 時刻 t における期待値

(1.9.179) を形式的に解けば

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \tag{1.9.180}$$

となる．これに対応するブラは

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi(0)|\mathrm{e}^{iHt/\hbar} \tag{1.9.181}$$

であるので，時刻 t における任意の物理量 A の期待値を $\langle A\rangle_t$ とかけば

$$\langle A\rangle_t = \langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle \tag{1.9.182}$$

と表される．他方，(1.9.180), (1.9.181) に注意すると

$$\langle A\rangle_t = \langle\psi(0)|A(t)|\psi(0)\rangle \tag{1.9.183}$$

$$\equiv \langle A(t)\rangle \tag{1.9.184}$$

と表すこともできる．ここで，

$$A(t) = \mathrm{e}^{iHt/\hbar}A\mathrm{e}^{-iHt/\hbar} \tag{1.9.185}$$

とかいている．(1.9.182) では，時間に依存しない物理量 A の期待値が，時刻 t の状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ および $\langle\psi(t)|$ で表されている．この立場を **Schrödinger 描像**（Schrödinger picture）という．他方，(1.9.183)-(1.9.185) はこれと異なり，状態ベクトルは時間によらず，演算子 $A(t)$ が時間に依存している．この立場は **Heisenberg 描像**（Heisenberg picture）とよばれる．両者の形式は異なっているが，同じ期待値を与えるという意味で同等である．

1.9.3 Heisenberg の運動方程式

(1.9.185) の両辺を時間で微分することにより，

$$i\hbar\dot{A}(t) = \mathrm{e}^{iHt/\hbar}[A, H]\mathrm{e}^{-iHt/\hbar} = [A(t), H(t)] \tag{1.9.186}$$

を得る．ハミルトニアン H と時間を推進させる演算子 $\mathrm{e}^{\pm iHt/\hbar}$ とは交換可能なので，(1.9.186) は

$$i\hbar\dot{A}(t) = [A(t), H] \tag{1.9.187}$$

とかいてもよい．(1.9.186) あるいは (1.9.187) を **Heisenberg の運動方程式** (Heisenberg equation of motion) という．古典力学は，物理量（粒子の座標，運動量，角運動量など）の時間変化を定める方程式（Newton（ニュートン）の運動方程式など）から出発するのであるから，Heisenberg 描像に対応している．

1.9.4 密度演算子（統計演算子）

物理系の状態が $|\psi(t)\rangle$ のとき，物理量 A の期待値は (1.9.182) で表されていた．この考えを一般化しよう．その第一歩として，**密度演算子** (density operator) あるいは密度行列 (density matrix) とよばれる，

$$W(t) = \sum_j |\psi_j(t)\rangle w_j \langle\psi_j(t)| \tag{1.9.188}$$

を導入する．ここで，$w_j \geq 0$, $\sum_j w_j = 1$ である．この $W(t)$ は**統計演算子** (statistical operator) とよばれることもある．ここで w_j は物理系が j 番目の状態をとる確率である．また，状態ベクトル $|\psi_j(t)\rangle$ は時間に依存する Schrödinger 方程式 (1.9.179) に従うとする．すなわち，

$$i\hbar|\dot{\psi}_j(t)\rangle = H|\psi_j(t)\rangle \tag{1.9.189}$$

である．同様にして，

$$-i\hbar\langle\dot{\psi}_j(t)| = \langle\psi_j(t)|H \tag{1.9.190}$$

が成り立つ．したがって (1.9.188) を時間で微分すれば，

$$\dot{W}(t) = \sum_j \left\{ |\dot{\psi}_j(t)\rangle w_j \langle \psi_j(t)| + |\psi_j(t)\rangle w_j \langle \dot{\psi}_j(t)| \right\} \tag{1.9.191}$$

であるから，(1.9.189), (1.9.190) を用いて，

$$i\hbar \dot{W}(t) = [H, W(t)] \tag{1.9.192}$$

を得る．密度行列 $W(t)$ の時間発展を決める (1.9.192) を **Liouville-von Neumann**（リウヴィユ・フォンノイマン）**方程式**（Liouville-von Neumann equation）という．

密度行列がわかれば物理量 A の期待値 $\langle A\rangle_t$ は，

$$\langle A\rangle_t = \mathrm{Tr}\{AW(t)\} \tag{1.9.193}$$

$$= \sum_j w_j \mathrm{Tr}\{A|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\} \tag{1.9.194}$$

$$= \sum_j w_j \langle\psi_j(t)|A|\psi_j(t)\rangle \tag{1.9.195}$$

$$= \sum_j w_j \langle A\rangle_{j,t} \tag{1.9.196}$$

のようにして求めることができる．ここで

$$\langle A\rangle_{j,t} = \langle\psi_j(t)|A|\psi_j(t)\rangle \tag{1.9.197}$$

という表記を導入している．また，Tr という記号はトレース（trace）と読み，任意の完全系を $\{|\Phi_n\rangle, n = 1, 2, \cdots\}$ とすると，

$$\mathrm{Tr}\{\ \bullet\ \} = \sum_n \langle\Phi_n|\bullet|\Phi_n\rangle \tag{1.9.198}$$

という操作を表す．(1.9.198) の $\bullet$ のところには演算子が入るのだが，

$$\langle\Phi_n|\bullet|\Phi_n\rangle = \text{行列の } n \text{ 行 } n \text{ 列要素}$$

と解釈すれば，(1.9.198) は

トレース演算＝対角（要素の）和

と読めばよい．これを用いれば (1.9.194) において，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{A|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\} &= \sum_n \langle\Phi_n|A|\psi_j(t)\rangle\langle\psi_j(t)|\Phi_n\rangle \\ &= \sum_n \langle\psi_j(t)|\Phi_n\rangle\langle\Phi_n|A|\psi_j(t)\rangle \\ &= \langle\psi_j(t)|A|\psi_j(t)\rangle \\ &= \langle A\rangle_{j,t}\end{aligned}$$

のように計算され，(1.9.195), (1.9.196) が得られる．すなわち，一般的に物理量 A の期待値（平均値）は密度行列を用いて，

$$\langle A\rangle_t = \mathrm{Tr}\{AW(t)\} \tag{1.9.199}$$

と表される．(1.9.199) において，(1.9.183) と同じ記号 $\langle A\rangle_t$ を用いているが，(1.9.199) の方がより一般的な表式である．(1.9.189) を見ると，任意の j に対して時間に依存する Schrödinger 方程式が成立している．(1.9.189) の形式解，

$$|\psi_j(t)\rangle = \mathrm{e}^{-iHt/\hbar}|\psi_j(0)\rangle \tag{1.9.200}$$

および対応するブラの表式を (1.9.188) に代入すると，

$$W(t) = \mathrm{e}^{-iHt/\hbar}W(0)\mathrm{e}^{iHt/\hbar} \tag{1.9.201}$$

となる．ここに，

$$W(0) = \sum_j |\psi_j(0)\rangle w_j \langle\psi_j(0)| \tag{1.9.202}$$

である．すなわち，指標 j は物理系の初期状態を区別する目印となっている．

1.9.5 相互作用描像

具体的な問題を扱う際に，ハミルトニアンが

$$H = H_0 + H_1 \tag{1.9.203}$$

と 2 つの部分にわかれ，H_0 の性質はよくわかっているという場合がある．このようなときには，(1.9.179) に従う $|\psi(t)\rangle$ を変換して

$$|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle = \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}|\psi(t)\rangle \tag{1.9.204}$$

という状態ベクトルを導入するとよい．(1.9.204) の両辺を時間の変数 t で微分し，(1.9.189) を用いると

$$i\hbar|\dot{\psi}^{\mathrm{I}}(t)\rangle = H_1^{\mathrm{I}}(t)|\psi^{\mathrm{I}}(t)\rangle \tag{1.9.205}$$

を得る．ここで

$$H_1^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}H_1\mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} \tag{1.9.206}$$

である．(1.9.205) を見ると H_0 が表面から消えて式の内部に取り込まれており，H_1 による影響を調べるには便利な形となっている．多くの場合，H_1 は注目している系とその周辺の系との間の相互作用を表す．そこで (1.9.205) を**相互作用描像** (interaction picture) における Schrödinger 方程式という．同様にして相互作用描像における密度行列を

$$W^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}W(t)\mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} \tag{1.9.207}$$

によって導入しよう．ここで $W(t)$ は (1.9.188) で与えられる．(1.9.207) を t で微分し，(1.9.192) を用いると

$$i\hbar\dot{W}^{\mathrm{I}}(t) = \left[H_1^{\mathrm{I}}(t), W^{\mathrm{I}}(t)\right] \tag{1.9.208}$$

を得る．この式は相互作用描像における Liouville-von Neumann 方程式であり，H_1 の影響を調べる際には (1.9.205) と同様，便利である．

1.10 不要な変数の消去

物理系は通常，多くの原子や分子から構成されている．しかしすべての原子の挙動が知りたいわけではなく，ある特定の小部分が興味の対象となることが多い．したがって我々が扱うのは，注目している部分とその周囲の環境系から成る複合系であり，その中から注目している部分を引き出せばよい．あるいは逆の視点に立てば，不要な（注目に値しない）変数を消去すればよいのである．このことを以下に簡単な例で説明しよう．単純化して，x と y という 2 つの変数から成る複合系を考える．物理系の状態を指定する関数を $f(x,y)$ として，注目している変数が x である場合，変数 y が不要である．このとき，$f(x,y)$ から y を消去するには，

$$F(x) \equiv \sum_y f(x,y) \tag{1.10.209}$$

のように，y について可能な範囲で和をとればよい．変数 x に関する情報は関数 $F(x)$ の中に含まれているからである．もちろん，注目している物理系の状態を適切に記述するには，$f(x,y)$ という関数をうまく選ぶ必要がある．この考え方を量子力学系に適用するには，次のようにすればよい．まず，変数 x, y に対応する演算子 X, Y は互いに可換である（$[X,Y]=0$）としよう．ここで Y の固有値方程式

$$Y|y\rangle = y|y\rangle \tag{1.10.210}$$

は解けているとすれば，$f(x,y)$ に対して

$$f(X,Y)|y\rangle = f(X,y)|y\rangle \tag{1.10.211}$$

が成り立つ．したがって

$$F(X) \equiv \sum_y \langle y|f(X,Y)|y\rangle \tag{1.10.212}$$

$$= \sum_y f(X,y) \tag{1.10.213}$$

は (1.10.209) に対応し，演算子 Y で表される不要な変数を消去したことになる．(1.10.212) の右辺は (1.9.198) の記号を用いて

$$\sum_y \langle y|f(X,Y)|y\rangle = \mathrm{Tr}_Y f(X,Y) \tag{1.10.214}$$

と表すことができる．Tr_Y のように下付き記号 Y を付したのは，変数 Y に関してのトレース操作であることを明示するためである．

以上を標語的にまとめれば

“量子系で不要な変数を消去するには，その変数に関するトレースをとればよい”

ということになる．

第2章

厳密に解ける量子複合系

第 1 章ではスピン系と調和振動子系の固有値，固有状態を求めた．本章ではまず，両者が結合している合成系（Jaynes-Cummings 模型）の固有値問題を解く．ついで，1 個の粒子が検出器に入射し，検出器を構成している多数の調和振動子と相互作用を行う，という量子複合系を扱う．多数の自由度を有する系の扱いは一般的には困難であるが，厳密に解ける理論模型を構成することができる．

2.1 Jaynes-Cummings（J-C）模型

第 1 章では，単純だが重要な物理系として，スピンと 1 次元調和振動子を扱った．では，これら 2 つの系の間に相互作用があるとどうなるかを考えてみよう．

2.1.1 ハミルトニアン

1.3 節を参照すると，スピンを表す演算子 s^z の固有状態にはスピン上向き状態 $|+\rangle$ およびスピン下向き状態 $|-\rangle$ がある．これら 2 つの状態は，ハミルトニアン，

$$H_{\mathrm{S}} = \hbar\omega_0 s^z \tag{2.1.1}$$

の固有状態となっている[*1]．

一方，1.7 節の (1.7.99) より 1 次元調和振動子のハミルトニアンは，

*1 2 つのエネルギー準位をもつ原子（2 準位原子）は，大きさ $\frac{1}{2}$ のスピン系と同等であることは，後者が状態 $|+\rangle$ および $|-\rangle$ をもつことからも了解されよう．

$$H_{\mathrm{F}} = \hbar\omega a^{\dagger} a \tag{2.1.2}$$

である．ここで，エネルギーの原点を取り直して，$\hbar\omega/2$ の項を省略してある．

これら 2 つの系の間にはたらく相互作用を可能な限り単純にして，スピン変数と調和振動子の変数の積の形，すなわち，

$$H_1 = \hbar g(s^+ + s^-)(a + a^{\dagger}) \tag{2.1.3}$$

とする．(2.1.3) の中で，

$$s^+ = |+\rangle\langle-|, \quad s^- = |-\rangle\langle+| \tag{2.1.4}$$

はそれぞれ**上昇演算子**および**下降演算子**とよばれ，

$$s^+|-\rangle = |+\rangle, \quad s^-|+\rangle = |-\rangle \tag{2.1.5}$$

という性質を有する．したがって，全系のハミルトニアンは

$$H = H_0 + H_1, \tag{2.1.6}$$

$$H_0 = H_{\mathrm{S}} + H_{\mathrm{F}} \tag{2.1.7}$$

で与えられる．またこの系は，**Jaynes-Cummings（ジェインズ・カミングス）模型**とよばれる．

(2.1.3) の右辺を展開すれば 4 つの項が現れる．このうち，2 つを残し，

$$H_1 = \hbar g(s^+ a + s^- a^{\dagger}) \tag{2.1.8}$$

としたものを**回転波近似**の相互作用ハミルトニアンという．(2.1.8) の右辺第 1 項では，$\hbar\omega$ のエネルギーをもった 1 つの量子が消滅し，そのエネルギーをもらったスピンの状態は $|-\rangle \to |+\rangle$ と変化する．このとき，$\omega_0 \cong \omega$ であればエネルギーの共鳴的な吸収が起こる．第 2 項は第 1 項の逆過程を表す．(2.1.8) を得る際に捨てた 2 つの項は，このような直感的な説明が難しい過程を表しているが，結合定数 g

が大きな場合には無視できないことが知られている．

2.1.2　固有値と固有状態

回転波近似のハミルトニアンに対しては固有値問題が厳密に解けるので，以下にこれを示す．

話をわかりやすくするために共鳴条件 $\omega_0 = \omega$ が成立する場合を扱う．このとき，$N = a^\dagger a$ より，

$$H_0 = \hbar\omega(N + s^z) \tag{2.1.9}$$

である．一方，(1.3.51), (1.3.52) および (1.7.101) より，

$$H_0|n, \pm\rangle = \hbar\omega\left(n \pm \frac{1}{2}\right)|n, \pm\rangle \tag{2.1.10}$$

が成り立つ．ここで，

$$|n, \pm\rangle = |n\rangle \otimes |\pm\rangle \tag{2.1.11}$$

という記法を使っている．次に H_0 と H_1 の交換関係を計算してみると，

$$\begin{aligned} [H_0, H_1] &= \hbar^2 g\omega\left[N + s^z, s^+ a + s^- a^\dagger\right] \\ &= \hbar^2 g\omega\left\{(a^\dagger s^- - s^+ a) + (s^+ a - s^- a^\dagger)\right\} = 0 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

となる．(2.1.12) の右辺の 2 行目で (1.7.107) を使っている．

このように H_0 と H_1 とが可換（交換可能）なときには，H_0 の固有状態であると同時に，H_1 の固有状態でもあるような同時固有状態が存在する．そこで H_0 の固有状態である (2.1.11) を用いて，以下の 2 つの状態，

$$|\phi_n(\theta)\rangle = \cos\theta|n+1, -\rangle + \sin\theta|n, +\rangle, \tag{2.1.13}$$

$$|\psi_n(\theta)\rangle = -\sin\theta|n+1, -\rangle + \cos\theta|n, +\rangle \tag{2.1.14}$$

を考えよう．これらの状態は正規直交系を成す．すなわち，

$$\langle\phi_n(\theta)|\phi_{n'}(\theta)\rangle=\delta_{nn'},\quad \langle\psi_n(\theta)|\psi_{n'}(\theta)\rangle=\delta_{nn'} \tag{2.1.15}$$

および

$$\langle\psi_n(\theta)|\phi_{n'}(\theta)\rangle=0 \tag{2.1.16}$$

が成り立つ．また，状態 $|0,-\rangle$ を含めれば，完全系を構成し，

$$\sum_{n=0}\{|\phi_n(\theta)\rangle\langle\phi_n(\theta)|+|\psi_n(\theta)\rangle\langle\psi_n(\theta)|\}+|0,-\rangle\langle 0,-|=I \tag{2.1.17}$$

が成り立つ．ここで，

$$I_{\mathrm{A}}=\sum_{n=0}|n\rangle\langle n|,\quad I_{\mathrm{S}}=|+\rangle\langle+|+|-\rangle\langle-| \tag{2.1.18}$$

として，$I=I_{\mathrm{A}}\otimes I_{\mathrm{S}}$ である．

そこで (2.1.6) の H を状態 $|\phi_n(\theta)\rangle$, $|\psi_n(\theta)\rangle$ のそれぞれに演算すると，

$$\begin{aligned}H|\phi_n(\theta)\rangle=&\left[2\hbar g\sin\theta\cos\theta\sqrt{n+1}+\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]|\phi_n(\theta)\rangle\\&+\hbar g(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sqrt{n+1}|\psi_n(\theta)\rangle\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

および

$$\begin{aligned}H|\psi_n(\theta)\rangle=&\left[-2\hbar g\sin\theta\cos\theta\sqrt{n+1}+\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]|\psi_n(\theta)\rangle\\&+\hbar g(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sqrt{n+1}|\phi_n(\theta)\rangle\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

を得る．これらの結果を求める際に，(2.1.13) と (2.1.14) を逆に解いて $|n+1,-\rangle$ および $|n,+\rangle$ を $|\phi_n(\theta)\rangle$ と $|\psi_n(\theta)\rangle$ で表した表式を使っている．

(2.1.19) と (2.1.20) を見ると，

$$\cos^2\theta = \sin^2\theta \tag{2.1.21}$$

となるように θ を定めれば,

$$H|\phi_n\rangle = E_1(n)|\phi_n\rangle, \quad H|\psi_n\rangle = E_2(n)|\psi_n\rangle \tag{2.1.22}$$

が得られる．このとき，エネルギー固有値は,

$$E_1(n) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar g\sqrt{n+1} \tag{2.1.23}$$

および

$$E_2(n) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \hbar g\sqrt{n+1} \tag{2.1.24}$$

である．θ は $\theta = \pi/4$ としてある．また，状態 $|0,-\rangle$ に対しては,

$$H|0,-\rangle = E_0|0,-\rangle \tag{2.1.25}$$

となり，$E_0 = -\hbar\omega/2$ である．

以上より，回転波近似の Jaynes-Cummings 模型の固有状態は (2.1.13), (2.1.14) および $|0,-\rangle$ となる．ただし，$\cos\theta = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$ である．対応するエネルギー固有値は (2.1.23), (2.1.24) および $E_0 = -\hbar\omega/2$ で与えられる．

2.2 ボソン検出器（BD）模型

この理論模型は，多数の調和振動子を 1 次元的に並べた検出器系と，大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンを有する 1 個の粒子で構成される．粒子は速度 v で検出器系に入射し，粒子のスピンが上向き状態のときにのみ，調和振動子との間で相互作用が起こる．また，検出器系の調和振動子間には相互作用は起こらないものとする．

2.2.1 ハミルトニアン

この理論模型全体のハミルトニアンは

$$H = H_0 + H_1, \tag{2.2.26}$$

$$H_0 = H_{\mathrm{S}} + H_{\mathrm{P}} + H_{\mathrm{D}}, \tag{2.2.27}$$

$$H_1 = \mathcal{P}_+ H_1' \tag{2.2.28}$$

と表される．ここで，(2.2.27) の各項は，入射粒子のスピン自由度および運動エネルギーのハミルトニアン，

$$H_{\mathrm{S}} = \hbar\omega_0 s^z, \quad H_{\mathrm{P}} = vp \tag{2.2.29}$$

に加えて検出器系のハミルトニアン，

$$H_{\mathrm{D}} = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j \tag{2.2.30}$$

を表す．ここで，調和振動子の総数を N 個とした．また，運動エネルギーが運動量 p に比例し，$H_{\mathrm{P}} = vp$ で与えられる粒子は，超相対論的粒子とよばれる．

相互作用ハミルトニアン (2.2.28) には，射影演算子

$$\mathcal{P}_+ = \frac{1}{2} + s^z \tag{2.2.31}$$

が導入されている．この射影演算子および $\mathcal{P}_- = \frac{1}{2} - s^z$ は s^z の固有状態 $|\pm\rangle$ に作用して

$$\mathcal{P}_\pm|\pm\rangle = |\pm\rangle, \quad \mathcal{P}_\pm|\mp\rangle = 0 \quad (\text{複号同順}) \tag{2.2.32}$$

となる．すなわち，$\mathcal{P}_+$ が存在することによって，(2.2.28) は入射粒子のスピンが上向き状態のときには有効となり，下向き状態のときには無効となる．また，(2.2.28) における H_1' は，

$$H_1' = \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^{N} \Omega_j (q - x_j) \left(a_j e^{i\omega_j q/v} + a_j^\dagger e^{-i\omega_j q/v} \right) \tag{2.2.33}$$

により与えられる．ここで，q は

$$q|x\rangle = x|x\rangle \tag{2.2.34}$$

と表される入射粒子の位置演算子であり，交換関係 $[q,p]=i\hbar$ を満足する．一方，$x_j(j=1,2,\cdots,N)$ は調和振動子のおかれている場所を表す．(2.2.33) に登場する関数 $\Omega_j(q-x_j)$ は，入射粒子と j 番目の調和振動子との距離を変数とした相互作用関数で，相互作用を特徴付けるパラメータを含む．すなわち，この相互作用関数 $\Omega_j(q-x_j)$ によって，入射粒子が j 番目の調和振動子に近づくと相互作用が強まり，遠ざかるにつれて弱まるという特徴を与えることができる．この具体的な例は後に示す．

以上のハミルトニアンを用いて密度演算子の時間発展を求めるための準備として，相互作用ハミルトニアン (2.2.28) の相互作用描像による表式を (1.9.206) の定義によって求めておく．

まず，ハミルトニアン $H_{\mathrm{S}}, H_{\mathrm{P}}, H_{\mathrm{D}}$ は可換なので，

$$\mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} = \mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{S}}t/\hbar}\mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{P}}t/\hbar}\mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{D}}t/\hbar} \tag{2.2.35}$$

が成り立つ．したがって，(2.2.35) によって (2.2.28) に含まれる演算子は

$$\mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}q\ \mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} = q+vt, \tag{2.2.36}$$

$$\mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}a_j^{\dagger}\mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} = a_j^{\dagger}\mathrm{e}^{i\omega_j t}, \tag{2.2.37}$$

$$\mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}a_j\ \mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} = a_j\mathrm{e}^{-i\omega_j t} \tag{2.2.38}$$

のように変換される．また，スピン演算子 s^z はこの変換に対して不変である．これらの結果を用いると (2.2.28) で与えられる H_1 の相互作用描像における表式は，

$$H_1^{\mathrm{I}}(t) = \mathcal{P}_+ {H'}_1^{\mathrm{I}}(t) \tag{2.2.39}$$

となる．ここで，

$$H'^{\mathrm{I}}_1(t) = \frac{\hbar}{2}\sum_{j=1}^{N}\Omega_j(q+vt-x_j)\left(a_j\mathrm{e}^{i\omega_j q/v} + a_j^\dagger \mathrm{e}^{-i\omega_j q/v}\right) \tag{2.2.40}$$

である．

2.2.2 密度演算子の時間発展

物理系の時間発展を論じるためには，(2.2.39) を用いて相互作用描像における Liouville-von Neumann 方程式 (1.9.208)，

$$i\hbar\dot{W}^{\mathrm{I}}(t) = \left[H_1^{\mathrm{I}}(t), W^{\mathrm{I}}(t)\right] \tag{2.2.41}$$

から出発して，密度演算子の時間発展を求めればよい．

全系の密度演算子の初期状態 ($t_0 \equiv 0$) が $W^{\mathrm{I}}(0) = W(0)$ であることから，時間発展演算子 $U^{\mathrm{I}}(t)$ を導入すると，(2.2.41) の解は

$$W^{\mathrm{I}}(t) = U^{\mathrm{I}}(t)W(0)U^{\mathrm{I}}(t)^\dagger \tag{2.2.42}$$

とかくことができる．この模型では，異なる時刻 t, t' での相互作用描像におけるハミルトニアン (2.2.39) の交換関係を求めると，

$$\left[H_1^{\mathrm{I}}(t), H_1^{\mathrm{I}}(t')\right] = 0 \tag{2.2.43}$$

となるため，時間発展演算子は

$$U^{\mathrm{I}}(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau H_1^{\mathrm{I}}(\tau)\right] \tag{2.2.44}$$

$$= \exp\left[-\mathcal{P}_+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N}\Theta_j(q,t)\left(a_j^\dagger \mathrm{e}^{-i\omega_j q/v} + a_j\mathrm{e}^{i\omega_j q/v}\right)\right] \tag{2.2.45}$$

と表される．相互作用関数は時間の変数で積分をした

$$\Theta_j(q,t) = \int_0^t d\tau \Omega_j(q+v\tau - x_j) \tag{2.2.46}$$

の中に取り込まれている．また，射影演算子 $\mathcal{P}_\pm$ についての性質

$$\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- = 1, \quad \mathcal{P}_\pm^2 = \mathcal{P}_\pm \tag{2.2.47}$$

を考慮すると，(2.2.45) は

$$U^{\mathrm{I}}(t) = \mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+ u_+^{\mathrm{I}}(t) \tag{2.2.48}$$

となる．ここで $u_+^{\mathrm{I}}(t)$ は，

$$u_+^{\mathrm{I}}(t) = \exp\left[-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^N \Theta_j(q,t)\left(a_j^\dagger \mathrm{e}^{-i\omega_j q/v} + a_j \mathrm{e}^{i\omega_j q/v}\right)\right] \tag{2.2.49}$$

で与えられる．

次に (2.2.48), (2.2.49) をスピン状態 $|\pm\rangle$ に作用してみると，

$$U^{\mathrm{I}}(t)|+\rangle = u_+^{\mathrm{I}}(t)|+\rangle, \quad U^{\mathrm{I}}(t)|-\rangle = |-\rangle \tag{2.2.50}$$

が成り立つ．これは，先に述べた入射粒子のスピン状態によって相互作用の有無が決まる，という性質を表している．

ここで多少の寄り道となるのだが，(2.2.49) が単純化される変換が存在することを示しておこう．このために演算子

$$\mathcal{D}(\{\phi_j\}) = \prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j(\phi_j), \quad \mathcal{D}_j(\phi_j) = \mathrm{e}^{-i\phi_j a_j^\dagger a_j} \tag{2.2.51}$$

を導入し，これを用いて (2.2.48) の変換を行う．まず，検出器系の生成・消滅演算子については

$$\mathcal{D}(\{\phi_j\})^\dagger a_j^\dagger \mathcal{D}(\{\phi_j\}) = a_j^\dagger \mathrm{e}^{i\phi_j}, \quad \mathcal{D}(\{\phi_j\})^\dagger a_j \mathcal{D}(\{\phi_j\}) = a_j \mathrm{e}^{-i\phi_j} \quad (2.2.52)$$

と変換されることがわかる．また，$\phi_j = \omega_j q/v$ とすると，入射粒子の運動エネルギーのハミルトニアンは

$$\mathcal{D}(\{\phi_j\})^\dagger vp\mathcal{D}(\{\phi_j\}) = vp - \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega_j a_j^\dagger a_j \quad (2.2.53)$$

となる．これらの結果より全系の密度演算子 $W(t)$ の時間発展演算子 $U(t)$ は，(2.2.48) の $U^{\mathrm{I}}(t)$ を用いて

$$U(t) = \mathrm{e}^{-iH_0 t/\hbar} U^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{-iH_0 t/\hbar} \left(\mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+ u_+^{\mathrm{I}}(t)\right) \quad (2.2.54)$$

$$= \mathcal{D}\left(\frac{\omega_j q}{v}\right) \mathrm{e}^{-i(H_{\mathrm{S}}+H_{\mathrm{P}})t/\hbar} \left(\mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+ V(t)\right) \mathcal{D}\left(\frac{\omega_j q}{v}\right)^\dagger \quad (2.2.55)$$

と書き直すことができる．ここで，

$$V(t) = \exp\left[-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N} \Theta_j(q,t)(a_j + a_j^\dagger)\right] \quad (2.2.56)$$

である．また，$\Theta_j(q,t)$ は (2.2.46) ですでに導入したものと同じである．(2.2.55) からわかるように，$\mathcal{D}(\cdot)$ と $\mathcal{D}(\cdot)^\dagger$ で囲まれた“回転系”では，H_{D} が表面から消えており，$u_+^{\mathrm{I}}(t)$ のかわりに単純な $V(t)$ が登場している．この回転系では相互作用が (2.2.33) よりも，見かけ上簡単化されているので物理過程の解釈が容易となる．また，これらの関係式は第 III 部第 7 章 7.3 節で展開される議論の出発点となる．

本論に戻ると，(2.2.42), (2.2.48) から，相互作用描像における全系の密度演算子の時間発展は，

$$W^{\mathrm{I}}(t) = \mathcal{P}_- W(0)\mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+ u_+^{\mathrm{I}}(t) W(0) u_+^{\mathrm{I}}(t)^\dagger \mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- W(0) u_+^{\mathrm{I}}(t)^\dagger \mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_+ u_+^{\mathrm{I}}(t) W(0)\mathcal{P}_- \quad (2.2.57)$$

となる．Schrödinger 描像に戻すには

$$W(t) = \mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} W^{\mathrm{I}}(t) \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar} \tag{2.2.58}$$

とすればよい．

密度演算子 $W(t)$, (2.2.58) には全系の情報が含まれている．我々が部分系の時間発展に注目する際には，(2.2.58) から前章で扱った不要な変数の消去を行い，相互作用の効果を含めた部分系の密度演算子を求めればよい．以下，入射粒子のスピン自由度に注目し，その密度演算子を求めてみよう．不要な変数の消去はその変数に関するトレースをとればよいので（1.10 節を参照），検出器系の変数の消去を $\mathrm{Tr_D}\bullet$，また入射粒子の運動を表す変数の消去を $\mathrm{Tr_P}\bullet$ と表せば，入射粒子のスピン自由度に関する密度演算子は

$$\rho_{\mathrm{S}}(t) = \mathrm{Tr_D}\,\mathrm{Tr_P}\, W(t) \tag{2.2.59}$$

である．

特に，初期時刻には入射粒子のスピン自由度，その軌道部分，および検出器系が互いに独立であるとすれば，全系の密度演算子は各部分系の密度演算子 $\rho_{\mathrm{S}}(0)$, $\rho_{\mathrm{P}}(0), \rho_{\mathrm{D}}(0)$ によって

$$W(0) = \rho_{\mathrm{S}}(0) \otimes \rho_{\mathrm{P}}(0) \otimes \rho_{\mathrm{D}}(0) \tag{2.2.60}$$

と表すことができ，(2.2.59) は，(2.2.57),(2.2.58) より

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{S}}(t) = \mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{S}}t/\hbar} \{&\mathcal{P}_+\rho_{\mathrm{S}}(0)\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-\rho_{\mathrm{S}}(0)\mathcal{P}_- \\ &+C(t)\mathcal{P}_+\rho_{\mathrm{S}}(0)\mathcal{P}_- + C(t)^*\mathcal{P}_-\rho_{\mathrm{S}}(0)\mathcal{P}_+\}\, \mathrm{e}^{iH_{\mathrm{S}}t/\hbar}\end{aligned} \tag{2.2.61}$$

となる．ここで $C(t)$ は，

$$C(t) = \mathrm{Tr_D}\,\mathrm{Tr_P}\left\{u_+^{\mathrm{I}}(t)\rho_{\mathrm{P}}(0) \otimes \rho_{\mathrm{D}}(0)\right\} \tag{2.2.62}$$

と表される．具体的な例として，入射粒子スピンの初期状態が

$$\rho_{\rm S}(0) = |I\rangle\langle I|, \tag{2.2.63}$$

$$|I\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1) \tag{2.2.64}$$

と表される純粋状態であったとき，(2.2.61) は

$$\begin{aligned}\rho_{\rm S}(t) = &|\alpha|^2|+\rangle\langle+| + |\beta|^2|-\rangle\langle-| \\ &+ \alpha\beta^* C(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}|+\rangle\langle-| + \alpha^*\beta C(t)^*\mathrm{e}^{i\omega_0 t}|-\rangle\langle+|\end{aligned} \tag{2.2.65}$$

となる．

以上より，入射粒子スピン自由度の密度演算子を求めることができたので，(2.2.65) を用いてスピン自由度の振舞いを調べる．

2.2.3 スピン変数の期待値

スピン変数の期待値は密度演算子によって

$$\langle s^\mu\rangle_t = \mathrm{Tr}_{\rm S}\{s^\mu \rho_{\rm S}(t)\} \quad (\mu = x, y, z) \tag{2.2.66}$$

である．2.1 節の (2.1.4) で導入された上昇演算子，下降演算子を用いると，(2.2.65) から

$$\langle s^+\rangle_t = \alpha^*\beta C(t)^*\mathrm{e}^{i\omega_0 t}, \quad \langle s^-\rangle_t = \alpha\beta^* C(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \tag{2.2.67}$$

を得る．ここで，

$$s^\pm = s^x \pm i s^y \tag{2.2.68}$$

であるので，

$$\langle s^x\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\alpha^*\beta C(t)^*\mathrm{e}^{i\omega_0 t} + \alpha\beta^* C(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\right), \tag{2.2.69}$$

$$\langle s^y\rangle_t = \frac{1}{2i}\left(\alpha^*\beta C(t)^*\mathrm{e}^{i\omega_0 t} - \alpha\beta^* C(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\right) \tag{2.2.70}$$

を得る．すなわち $C(t)$ をとおして，x, y 成分には相互作用の効果が現れていることがわかる．また，s^z に関しては

$$\langle s^z \rangle_t = \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right) \tag{2.2.71}$$

となり，時間に対して不変である．

一般に，大きさ $\frac{1}{2}$ のスピン系に関する密度演算子は 2 行 2 列の行列表現をとると，

$$\begin{aligned}\rho = & \left(\frac{1}{2} + \langle s^z \rangle_t\right)|+\rangle\langle+| + \left(\frac{1}{2} - \langle s^z \rangle_t\right)|-\rangle\langle-| \\ & + \langle s^- \rangle_t |+\rangle\langle-| + \langle s^+ \rangle_t |-\rangle\langle+|\end{aligned} \tag{2.2.72}$$

とかくことができるので，(2.2.65) と (2.2.72) から得られるスピンの期待値と直接求めた (2.2.69)-(2.2.71) の結果が一致していることがわかるであろう．

ここで，スピン変数の期待値の x, y 成分について時間変化を図に表してみよう．そのため，検出器系における j 番目の調和振動子は

$$a_j|0_j\rangle = 0 \tag{2.2.73}$$

によって定義される真空状態を初期状態とし，検出器系全体では

$$\rho_{\mathrm{D}}(0) = \prod_{j=1}^{N} |0_j\rangle\langle 0_j| \tag{2.2.74}$$

と表す．また，入射粒子系の軌道部分の初期状態は (2.2.34) によって定義されたケット状態を基底とした純粋状態

$$\rho_{\mathrm{P}}(0) = \int\int dx dx' \psi(x)\psi(x')^* |x\rangle\langle x'| \tag{2.2.75}$$

とする．このとき，(2.2.49) を用いて (2.2.62) を求めると，

$$C(t)=\int dx|\psi(x)|^2\prod_{j=1}^{N}\exp\left[-\frac{1}{8}\Theta_j(x,t)^2\right] \tag{2.2.76}$$

と表される．よって，相互作用が進むにつれて (2.2.76) の絶対値は減衰を示し，スピン変数の期待値の x, y 成分が小さくなることを示している．検出器系の調和振動子の総数 N や相互作用の効果 $\Theta_j(x,t)$ が大きくなるにつれ，$C(t)$ はより著しい減衰を表すことがわかる．

また，$\Theta_j(x,t)$ は (2.2.46) で与えられているが，具体的な計算を進めるには，相互作用関数 $\Omega_j(x+v\tau-x_j)$ の「入射粒子が検出器系の調和振動子に近づくと相互作用が強まる」という性質を考慮して，

$$\Omega_j(x+v\tau-x_j)=\frac{\Omega_j d}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\mathrm{e}^{-(x+v\tau-x_j)^2/2\delta^2} \tag{2.2.77}$$

と仮定する．ここで，$x_j-x_{j-1}=d$ である．

(2.2.69), (2.2.70) に従って $\langle s^x\rangle_t, \langle s^y\rangle_t$ を計算した結果を図 2.1 に示す．スピンの x, y 方向成分の期待値が，検出器系との相互作用により減衰していく様子が見てとれる．

さて，$\langle s^+\rangle_t$ の解は (2.2.67) であるが，これより $\langle s^+\rangle_t$ の従う方程式は，

$$\frac{d}{dt}\langle s^+\rangle_t=\left(i\omega_0+\frac{\dot{C}(t)^*}{C(t)^*}\right)\langle s^+\rangle_t \tag{2.2.78}$$

であることがわかる．

スピン系が環境系と相互作用をすると，スピン系が初めにもっていたエネルギーや“よい性質”を失うことになる．“よい性質”とは，スピンがある特定の方向を向いていた，といった事柄を指す．このような状態変化を表す基礎方程式は，Bloch（ブロッホ）によって提案されており，

$$\frac{d}{dt}\langle s^+\rangle_t=\left(i\omega_0-\frac{1}{T_2}\right)\langle s^+\rangle_t \tag{2.2.79}$$

および

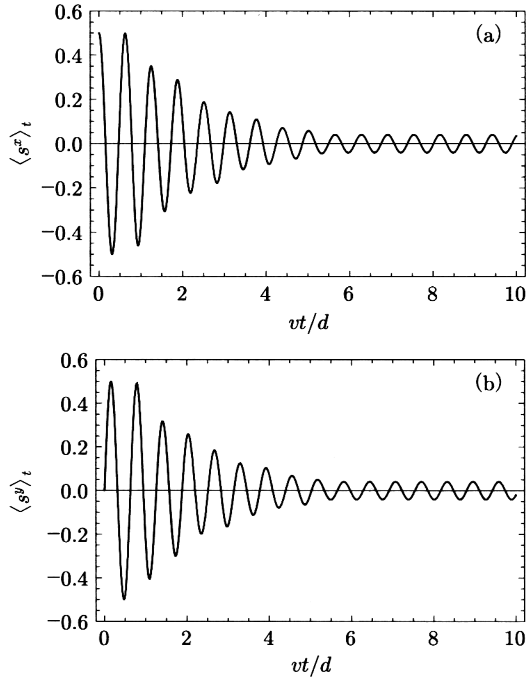


図 2.1 入射粒子スピン変数の期待値の時間発展. (a) は x 成分, (b) は y 成分. 各パラメータは $N=5$, $\Omega_j d/v=2$, $\delta/d=0.25$, $\omega_0 d/v=10$.

$$\frac{d}{dt}\langle s^z\rangle_t = -\frac{1}{T_1}\left(\langle s^z\rangle_t - \langle s^z\rangle_{\text{eq}}\right) \tag{2.2.80}$$

である．スピンの z 成分が減少することを表す (2.2.80) は縦緩和の方程式とよばれ，スピン系のエネルギーの減少を表す．$\langle s^z\rangle_{\text{eq}}$ は s^z の平衡値である．他方，$\langle s^+\rangle_t = \langle s^x\rangle_t + i\langle s^y\rangle_t$ であるので，$\langle s^x\rangle_t$，$\langle s^y\rangle_t$ の減衰を表す (2.2.79) は横緩和の方程式とよばれている．ボソン検出器模型では，s^z が保存量となっている，すなわち，$[H, s^z]=0$ が成り立っているので，$\langle \dot{s^z}\rangle_t = 0$ である．しかし，横緩和方程式は (2.2.78) で与えられており，**Bloch** 方程式 (2.2.79) の一般化となっている．すなわち，

$$\frac{1}{T_2} \longleftrightarrow \frac{1}{T_2(t)} \equiv -\frac{\dot{C}(t)^*}{C(t)^*} \tag{2.2.81}$$

という対応が成り立つ．通常の Bloch 方程式では，T_2 は横緩和時間とよばれ，$\langle s^x \rangle_t$, $\langle s^y \rangle_t$ の減衰の尺度となっている．ここでは，減衰に要する時間尺度が，その時点 t に依存して変化する，という意味で Bloch 方程式の一般化となっている．

では具体的に，スピン $\boldsymbol{s}$ がその "よい性質" を失っていく様子を目で見るにはどうしたらよいであろうか．スピンに関する情報は密度演算子 $\rho_S(t)$ の中に含まれているのであるから，スピンが極座標の表示で (θ, ϕ) 方向を向いている確率が求まればよいであろう．スピンがこの方向を向いている状態を $|\theta, \phi\rangle$ とすれば，求めるべき確率は

$$Q(\theta, \phi, t) \equiv \langle \theta, \phi | \rho_S(t) | \theta, \phi \rangle \tag{2.2.82}$$

である．

状態 $|\theta, \phi\rangle$ を定めるには以下のようにすればよい．すなわち，極座標表示で (θ, ϕ) 方向を向いている単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば，

$$\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta) \tag{2.2.83}$$

である．よってスピン $\boldsymbol{s}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向成分は $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}$ である．したがって状態 $|\theta, \phi\rangle$ は固有値方程式，

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|\theta, \phi\rangle = \frac{1}{2}|\theta, \phi\rangle \tag{2.2.84}$$

の解である．大きさ $\frac{1}{2}$ をもつスピンの空間では，状態 $|+\rangle, |-\rangle$ が完全系を成していることにより，

$$|\theta, \phi\rangle = a_+|+\rangle + a_-|-\rangle \tag{2.2.85}$$

という展開が可能となる．(2.2.84) に (2.2.85) を代入すると，a_+ と a_- との間には，

$$a_- = \frac{e^{i\phi}\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot a_+ \tag{2.2.86}$$

が成り立ち，$|a_+|^2+|a_-|^2=1$ を考慮すると，

$$|a_+|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} \tag{2.2.87}$$

が得られる．a_+ の位相を $e^{-i\phi/2}$ ととれば，

$$a_+ = e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,,\quad a_- = e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \tag{2.2.88}$$

が得られる．したがって，

$$|\theta,\phi\rangle = e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle \tag{2.2.89}$$

である．この $|\theta,\phi\rangle$ はスピンが (θ,ϕ) 方向を向いている状態であり，**Bloch 状態**とよばれている．

(2.2.89) を (2.2.82) に用いれば，(2.2.65) より，

$$\begin{aligned}Q(\theta,\phi,t) &= \frac{1}{2}|\alpha|^2(1+\cos\theta)+\frac{1}{2}|\beta|^2(1-\cos\theta)\\ &\quad+\frac{1}{2}\alpha\beta^*C(t)e^{-i\omega_0 t}e^{i\phi}\sin\theta+\frac{1}{2}\alpha^*\beta C^*(t)e^{i\omega_0 t}e^{-i\phi}\sin\theta\end{aligned} \tag{2.2.90}$$

を得る．関数 $Q(\theta,\phi,t)$ は**準確率密度**（quasi-probability density）とよばれるものの一例であり，通常の確率論における確率密度の量子力学的な拡張となっている．準確率密度にはさまざまな種類がある．スピン系に対しては Bloch 状態を使えばよいが，調和振動子系を扱うにはコヒーレント状態が重要である．これらの理論は第 II 部（4.3 節，5.4 節），第 III 部（8.5 節）および付録（A.2 節）で展開される．

図 2.2 には (2.2.90) を用いて計算した $Q(\theta,\phi,t)$ が描かれている．図の原点と周上の点を結んだ線分の長さが長いほど，スピンがその方向を向く確率は大きい．図 2.2(a) には初期時刻 $t=0$ における $Q(\theta=\pi/2,\phi,t=0)$ が示されている．このときスピン系は x 方向を向いており，

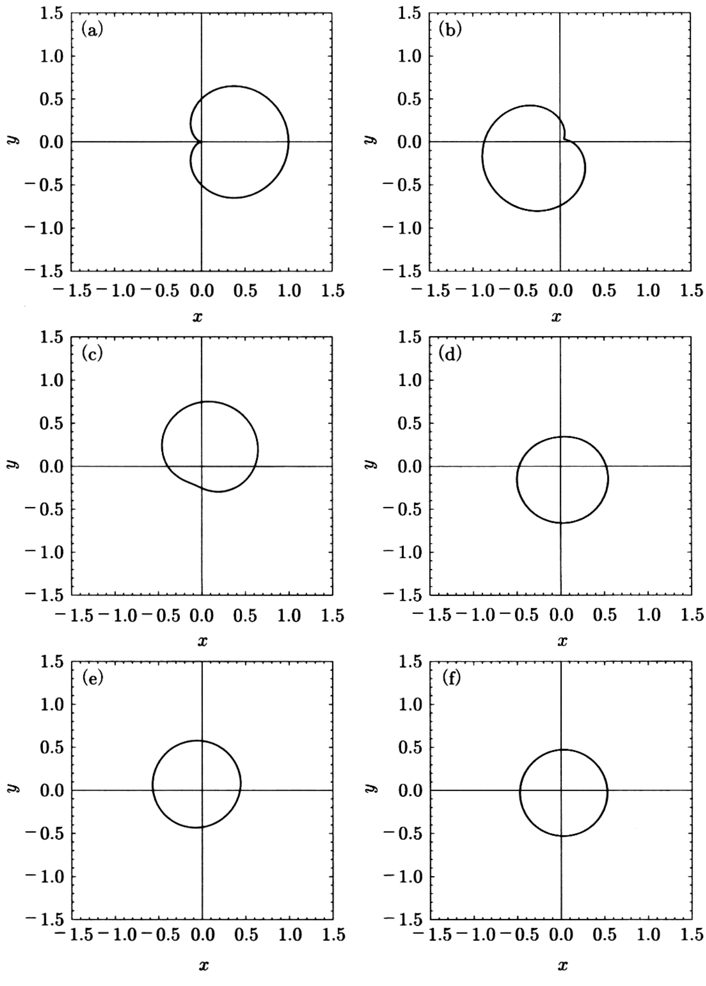


図 2.2 入射粒子スピンの準確率密度 $Q(\theta=\pi/2, \phi, t)$ の時間発展. (a)$\hat{t}=0$, (b)$\hat{t}=1$, (c)$\hat{t}=2$, (d)$\hat{t}=3$, (e)$\hat{t}=4$, (f)$\hat{t}=15$. 各パラメータは $N=5$, $\Omega_j d/v=2$, $\delta/d=0.25$, $\omega_0 d/v=10$. また, $\hat{t}=vt/d$ である.

$$\rho_{\rm S}(t=0)=|I\rangle\langle I|, \quad |I\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle)$$

の状態にある ($\alpha=\beta=1/\sqrt{2}$). この (a) を見ると, スピンは x 方向のみではなく, x-y 平面上のあちこちを向く確率をもっている. これは量子ゆらぎの一例であ

って，古典物理学とは異なる性格の現れである．s^x の平均をとれば y 方向のゆらぎは打ち消し合って，(2.2.69) からわかるように $\langle s^x \rangle_{t=0}$ は正確に $\frac{1}{2}$ となっている．

以下，(b)，(c)，$\cdots$ と時間を追っていくと，初期に向いていたスピンの方向が，時間の経過とともに乱雑化していく（x-y 平面内で一様化していく）様子が見られるであろう．

第3章

非平衡量子系のダイナミクス

温度が一定の環境下におかれた物理系は，十分時間が経てば，環境との間に正味のエネルギーの出入りはなくなり，ある状態におちつく．このとき，物理系は(熱) **平衡状態**（(thermal) equilibrium state）にあるという．しかし一般的には，注目している物理系は平衡状態にはなく，周囲の環境世界と相互作用を行いつつ，エネルギーなどのやり取りを通して平衡状態に向かうことになる．本章では，平衡状態にはない量子系（非平衡量子系）がたどる時間変化（ダイナミクス）を記述する基本式を導く．

3.1 Schrödinger 描像の基本式

密度行列の時間発展は Liouville-von Neumann 方程式 (1.9.192) で表され，

$$\dot{W}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H,\ W(t)\ ] \equiv -\frac{i}{\hbar}H^{\times}W(t) \tag{3.1.1}$$

$$\equiv -iLW(t) \tag{3.1.2}$$

である．ここで新たな記号

$$H^{\times}\bullet = [H,\ \bullet\ ], \quad L\bullet = \frac{1}{\hbar}[H,\ \bullet\ ] \tag{3.1.3}$$

を導入している．

(3.1.3) の上付き記号 $^{\times}$ は，交換関係をとれ，という命令であり，(3.1.3) の L も本質的には同じ操作を表しているが，特に Liouville 演算子とよばれている．通常の作用素は状態ベクトル（ブラやケット）に作用するが，$H^{\times}$ や L は作用素に作用するので**超作用素**と称される．

ここで 1.10 節で行った変数の消去を思い起こすことにしよう．我々が注目している系（S 系とよぶ）がそれを取り巻く環境系（R 系とよぶ）と相互作用をしている状況を考え，不要な環境系の変数を消去して，S 系に関する情報のみを残すのである．この操作は (1.10.214) で表されるのであるから，

$$\mathcal{P}\bullet = \rho_{\mathrm{R}}\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\bullet \tag{3.1.4}$$

という**射影演算子**（projection operator）を導入しておくと便利である．ここで Tr_{R} は R 系の変数を消去する操作である．また ρ_{R} は R 系の密度演算子であり，射影演算子 $\mathcal{P}$ に対して，

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \tag{3.1.5}$$

という性質を要請すると

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\rho_{\mathrm{R}} = 1 \tag{3.1.6}$$

を満たさねばならない．(3.1.5) という性質は

$$\mathcal{P}(1-\mathcal{P}) = 0 \tag{3.1.7}$$

を表しているので，

$$\mathcal{Q} \equiv 1-\mathcal{P} \tag{3.1.8}$$

を導入すると

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0, \quad \mathcal{Q}\mathcal{P} = 0 \tag{3.1.9}$$

が成り立つ．

射影演算子 $\mathcal{P}$ は S 系の情報を引き出す操作であるので (3.1.8) の $\mathcal{Q}$ は，全体 (= 1) から S 系の情報を差し引いた不要な情報を担っている．そして (3.1.9) が語っているように，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ とは互いに“直交”している．

したがって，全系の時間発展を支配する密度演算子 $W(t)$ から，R 系の変数を消去して S 系の運動を引き出すには，$\mathcal{P}W(t)$ を求めればよい．このため，(3.1.2) の両辺に $\mathcal{P}$ を作用させれば

$$\mathcal{P}\dot{W}(t) = -i\mathcal{P}L\mathcal{P}W(t) - i\mathcal{P}L\mathcal{Q}W(t) \tag{3.1.10}$$

を得る．ここで右辺を求める際に $\mathcal{P}+\mathcal{Q}=1$ という関係式を用いている．

(3.1.10) の右辺には未知の $\mathcal{Q}W(t)$ が登場しているので，(3.1.2) の両辺に $\mathcal{Q}$ を作用させて

$$\mathcal{Q}\dot{W}(t) = -i\mathcal{Q}L\mathcal{P}W(t) - i\mathcal{Q}L\mathcal{Q}W(t) \tag{3.1.11}$$

という式を求めておく必要がある．

すなわち，(3.1.10) および (3.1.11) は，

$$x(t) = \mathcal{P}W(t), \quad y(t) = \mathcal{Q}W(t) \tag{3.1.12}$$

と置き換えることにより，

$$\dot{x}(t) = -i\mathcal{P}Lx(t) - i\mathcal{P}Ly(t), \tag{3.1.13}$$

$$\dot{y}(t) = -i\mathcal{Q}Lx(t) - i\mathcal{Q}Ly(t) \tag{3.1.14}$$

という連立の微分方程式であることがわかるであろう．

我々の興味は $x(t)$ にあるので (3.1.13), (3.1.14) から $y(t)$ を消去して $x(t)$ を求めればよい．$y(t)$ の消去の仕方によって 2 通りの基本式が得られる．以下にこれを示そう．

3.1.1 畳込み型の方程式

まず (3.1.14) は $y(t) = \mathrm{e}^{-i\mathcal{Q}Lt}Y(t)$ という変数変換により

$$\dot{Y}(t) = \mathrm{e}^{i\mathcal{Q}Lt}(-i\mathcal{Q}L)x(t) \tag{3.1.15}$$

となるが，この式を初期時刻 t_0 として積分し，$y(t)$ を求めると

$$y(t)=\mathrm{e}^{-iQL(t-t_0)}y(t_0)+\int_{t_0}^{t}dt'\mathrm{e}^{-iQL(t-t')}(-iQL)x(t') \tag{3.1.16}$$

を得る．

(3.1.16) を (3.1.13) に代入すると

$$\dot{x}(t)=-i\mathcal{P}Lx(t)+\int_{t_0}^{t}dt'\Phi(t-t')x(t')+I(t,t_0) \tag{3.1.17}$$

となる．ここで

$$\Phi(t-t')=-i\mathcal{P}L\mathrm{e}^{-iQL(t-t')}(-iQL), \tag{3.1.18}$$

$$I(t,t_0)=-i\mathcal{P}L\mathrm{e}^{-iQL(t-t_0)}y(t_0) \tag{3.1.19}$$

とおいている．

(3.1.17) は $x(t)$ に対する基本方程式の 1 つで，**時間畳込み（time convolution（TC））型**方程式とよばれる．この式の右辺第 2 項は通常，畳込み積分，あるいは接合積と称されており，これが命名のいわれである．この項は初期時刻 t_0 から現在の時刻 t までの過去の履歴を積分の形で含んでおり，記憶効果を表していると解釈される．右辺第 3 項の $I(t,t_0)$ は $y(t_0)$ をとおして密度行列の初期値 $W(t_0)$ に依存している．

以上より，我々が注目している S 系のダイナミクスは (3.1.17) により支配されていることが了解されよう．環境世界である R 系の主な影響は (3.1.18) の $\Phi(t-t')$ の中に取り込まれているのである．(3.1.17) は上述のごとく自然な構造をもっており，長い間 $x(t)$ の従う唯一の方程式であると考えられていた．しかし，$x(t)$ の基本式は他にも存在するのである．以下にこれを示そう．

3.1.2 非畳込み型の方程式

$W(t)$ の従う (3.1.2) を形式的に解けば，

$$W(t)=\mathrm{e}^{-iL(t-t')}W(t') \quad (t\geq t'\geq t_0) \tag{3.1.20}$$

を得る．したがって (3.1.16) の右辺第 2 項の中にある $x(t')$ は

$$\begin{aligned} x(t') &= \mathcal{P}W(t') \\ &= \mathcal{P}\mathrm{e}^{iL(t-t')}(\mathcal{P}+\mathcal{Q})W(t) \\ &= \mathcal{P}\mathrm{e}^{iL(t-t')}\{x(t)+y(t)\} \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

となり，$x(t)$ と $y(t)$ で表すことができる．(3.1.21) を (3.1.16) に代入して $y(t)$ について解けば

$$y(t) = \{\Theta(t,t_0)-1\}x(t) + \Theta(t,t_0)\mathrm{e}^{-i\mathcal{Q}L(t-t_0)}y(t_0) \tag{3.1.22}$$

を得る．ここで

$$\Theta(t,t_0) = \left\{1 - \int_{t_0}^{t} dt'\mathrm{e}^{-i\mathcal{Q}L(t-t')}(-i\mathcal{Q}L)\mathcal{P}\mathrm{e}^{iL(t-t')}\right\}^{-1} \tag{3.1.23}$$

である．(3.1.13) に (3.1.22) を用いれば

$$\dot{x}(t) = -i\mathcal{P}Lx(t) - i\mathcal{P}L\{\Theta(t,t_0)-1\}x(t) + \mathcal{I}(t,t_0) \tag{3.1.24}$$

となる．ここで

$$\mathcal{I}(t) = -i\mathcal{P}L\Theta(t,t_0)\mathrm{e}^{-i\mathcal{Q}L(t-t_0)}y(t_0) \tag{3.1.25}$$

である．

(3.1.24) は $x(t)$ に関する閉じた式であり，(3.1.17) の TC 型とは異なり，$x(t')$ $(t_0 \leq t' \leq t)$ には依存しないので**時間非畳込み**（**time convolutionless (TCL)**）**型方程式**とよばれる．一見したところ TCL 型方程式 (3.1.24) は過去の履歴（記憶）を含んでいないように思えるが，(3.1.23) からわかるようにその効果は $\Theta(t,t_0)$ をとおして (3.1.24) の "係数" に含まれている．

基本方程式 (3.1.17) および (3.1.24) は見かけの違いにもかかわらず数学的には等価である．しかし，実際の問題に適用する際には近似的扱いをすることが多く，そこでは両者に差が生じる．以下に示すように具体的問題を時間領域で扱うときには TCL 型が有用である．

3.2 相互作用描像へ

物理系の扱いにおいて，ハミルトニアンが

$$H = H_0 + H_1 \tag{3.2.26}$$

とかけていて，H_0 の固有値問題は解けており，H_1 の影響は比較的弱い場合がある．

このようなときには (1.9.208)，すなわち

$$\dot{W}^{\mathrm{I}}(t) = -\frac{i}{\hbar}H_1^{\mathrm{I}}(t)^{\times}W^{\mathrm{I}}(t) \tag{3.2.27}$$

$$= -iL_1^{\mathrm{I}}(t)W^{\mathrm{I}}(t) \tag{3.2.28}$$

から出発するのが便利である．ここで $H_1^{\mathrm{I}}(t)$ は

$$H_1^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}H_1\mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} \tag{3.2.29}$$

で与えられる．(1.9.206) を参照．(3.2.28) の微分方程式は

$$\dot{z}(t) = a(t)z(t) \tag{3.2.30}$$

という形をしている．この式を解くには次のようにすればよい．

まず $z(t)$ を

$$z(t) = z^{(0)}(t) + z^{(1)}(t) + z^{(2)}(t) + \cdots \tag{3.2.31}$$

と展開する．上付き数字は $a(t)$ を積の形で何個含むかを示す目印である．また初期時刻 t_0 に対して $z(t_0) = z^{(0)}(t_0)$ とする．(3.2.31) を (3.2.30) に代入し，左辺と右辺で $a(t)$ に関して等しい冪（べキ）の項を等置すると

$$\dot{z}^{(0)}(t) = 0, \tag{3.2.32}$$

$$\dot{z}^{(1)}(t) = a(t)z^{(0)}(t), \tag{3.2.33}$$

$$\dot{z}^{(2)}(t) = a(t)z^{(1)}(t), \tag{3.2.34}$$

$$\vdots$$

という一連の式が得られる.

まず (3.2.32) より

$$z^{(0)}(t) = z^{(0)}(t_0) \tag{3.2.35}$$

である. 次に (3.2.35) を (3.2.33) に用いれば

$$z^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{t} dt' a(t') z^{(0)}(t_0) \tag{3.2.36}$$

となる. また, (3.2.34), (3.2.36) より

$$z^{(2)}(t) = \int_{t_0}^{t} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' a(t'') a(t') z^{(0)}(t_0) \tag{3.2.37}$$

を得る. 同様にして $z^{(3)}(t)$, $z^{(4)}(t)$, $\cdots$ を求めると, (3.2.31) より

$$\begin{aligned} z(t) = \Bigg\{ 1 &+ \int_{t_0}^{t} dt_1 a(t_1) + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 a(t_1) a(t_2) + \cdots \\ &+ \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n a(t_1) a(t_2) a(t_3) \cdots a(t_n) \\ &+ \cdots \Bigg\} z(t_0) \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

という解が得られる. ここで時間には

$$t \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_0 \tag{3.2.39}$$

という順序が付いていることに注意しよう. (3.2.38) を簡潔に

$$z(t) = \mathrm{T}_+ \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} dt' a(t')} z(t_0) \tag{3.2.40}$$

と表すことにする．記号 T_+ は $a(t)$ の積の中で時間の大きい順に左から右に並べよ，という命令である．(3.2.40) に登場する

$$\mathrm{T}_+ \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} dt' a(t')}$$

を時間順序の付いた指数関数（time ordered exponential function）という．

これを用いれば (3.2.28) の解はただちに

$$W^{\mathrm{I}}(t) = U^{\mathrm{I}}(t, t_0) W^{\mathrm{I}}(t_0) \tag{3.2.41}$$

と求まる．ここで，

$$U^{\mathrm{I}}(t, t_0) = \mathrm{T}_+ \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} dt' \left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t')\right)} \tag{3.2.42}$$

とおいている．そこで，(3.2.28) から (3.1.13), (3.1.14) に対応した連立微分方程式を求めると次のようになる．

$$\dot{x}(t) = -i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)x(t) - i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)y(t), \tag{3.2.43}$$

$$\dot{y}(t) = -i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t)x(t) - i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t)y(t). \tag{3.2.44}$$

ここで，$x(t)$, $y(t)$ はそれぞれ，

$$x(t) = \mathcal{P}W^{\mathrm{I}}(t), \quad y(t) = \mathcal{Q}W^{\mathrm{I}}(t) \tag{3.2.45}$$

である．(3.1.16) を得たときと同様な変換を用いて，(3.2.44) から $y(t)$ を求めると

$$y(t) = \mathcal{G}(t, t_0) y(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \mathcal{G}(t, t') \left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t')\right) x(t') \tag{3.2.46}$$

が得られる．ここで

$$\mathcal{G}(t,t_0)=\mathrm{T}_+\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}dt'(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t'))} \tag{3.2.47}$$

である．(3.2.46) を得る際に

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}(t,t_0)=-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t)\mathcal{G}(t,t_0) \tag{3.2.48}$$

および

$$\mathcal{G}(t,t_0)=\mathcal{G}(t,t')\mathcal{G}(t',t_0)\quad(t\geq t'\geq t_0) \tag{3.2.49}$$

という関係式を使っている．(3.2.46) を (3.2.43) に用いることにより

$$\dot{x}(t)=-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}dt'\Phi(t,t')x(t')+I(t,t_0) \tag{3.2.50}$$

という基本式が得られる．ここで

$$\Phi(t,t')=\left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\mathcal{G}(t,t')\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t')\right), \tag{3.2.51}$$

$$I(t,t_0)=-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\mathcal{G}(t,t_0)y(t_0) \tag{3.2.52}$$

である．また，(3.2.50) は相互作用描像における **TC** 型方程式である．これらの表式を (3.1.17)-(3.1.19) と比較すると

$$L\longleftrightarrow\ L_1^{\mathrm{I}}(t), \tag{3.2.53}$$

$$\mathrm{e}^{-i\mathcal{Q}L(t-\tau)}\longleftrightarrow\ \mathcal{G}(t,\tau) \tag{3.2.54}$$

という対応関係がある．また，(3.1.20) と (3.2.42) より

$$\mathrm{e}^{-iL(t-t')}\longleftrightarrow\ U^{\mathrm{I}}(t,t') \tag{3.2.55}$$

である．さらに，

$$G^{\mathrm{I}}(t,t')=\mathrm{T}_{-}\mathrm{e}^{\int_{t'}^{t}d\tau iL_1^{\mathrm{I}}(\tau)}\quad (t_0\le t'\le t) \tag{3.2.56}$$

を定義しておくと，

$$\mathrm{e}^{iL(t-t')}\longleftrightarrow G^{\mathrm{I}}(t,t') \tag{3.2.57}$$

という対応関係となる．ここで記号 T_{-} は (3.2.40) の T_{+} とは逆に，時間の大きい順に右から左に並べよ，という命令である．したがって (3.2.56) より，

$$\dot{G}^{\mathrm{I}}(t,t')=G^{\mathrm{I}}(t,t')iL_1^{\mathrm{I}}(t) \tag{3.2.58}$$

が成り立つ．

次に対応関係 (3.2.57) について考察を加えておく．(3.2.55) の $\mathrm{e}^{-iL(t-t')}$ と (3.2.57) の $\mathrm{e}^{iL(t-t')}$ とは逆演算の関係にあるから，$U^{\mathrm{I}}(t,t')$ と $G^{\mathrm{I}}(t,t')$ の間にも同様の関係が成立せねばならない．すなわち，

$$G^{\mathrm{I}}(t,t')U^{\mathrm{I}}(t,t')=1 \tag{3.2.59}$$

が成り立つはずである．以下にこれを示そう．

(3.2.59) の左辺を t で微分すると，

$$\begin{aligned}\dot{G}^{\mathrm{I}}(t,t')U^{\mathrm{I}}(t,t')+G^{\mathrm{I}}(t,t')\dot{U}^{\mathrm{I}}(t,t')&=G^{\mathrm{I}}(t,t')iL_1^{\mathrm{I}}(t)U^{\mathrm{I}}(t,t')\\&\quad+G^{\mathrm{I}}(t,t')\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)U^{\mathrm{I}}(t,t')\\&=0\end{aligned} \tag{3.2.60}$$

となる．ここで，(3.2.42) から得られる

$$\dot{U}^{\mathrm{I}}(t,t')=-iL_1^{\mathrm{I}}(t)U^{\mathrm{I}}(t,t') \tag{3.2.61}$$

および (3.2.58) を使っている．

以上より (3.2.59) の左辺は t に依存しないことがわかったので，$t=t'$ とおくと (3.2.42) より，$U^{\mathrm{I}}(t',t')=1$，また (3.2.56) より，$G^{\mathrm{I}}(t',t')=1$ となるので，

(3.2.59) の関係を得る．すなわち，

$$U^{\mathrm{I}}(t,t') = G^{\mathrm{I}}(t,t')^{-1} \tag{3.2.62}$$

の関係が得られる．これより，(3.2.62) で $U^{\mathrm{I}}(t,t')$ と $G(t,t')$ を入れ替えた関係式も成り立つので，(3.2.57) の対応が了解されよう．これらの対応関係を用いれば，(3.1.24) よりただちに**相互作用描像における TCL 型方程式**が得られる．すなわち，

$$\dot{x}(t) = -i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)x(t) - i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\left\{\Theta(t,t_0)-1\right\}x(t) + \mathcal{I}(t,t_0) \tag{3.2.63}$$

$$= K(t,t_0)x(t) + \mathcal{I}(t,t_0) \tag{3.2.64}$$

である．ここに，

$$K(t,t_0) = -i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\Theta(t,t_0), \tag{3.2.65}$$

$$\mathcal{I}(t,t_0) = -i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\Theta(t,t_0)\mathcal{G}(t,t_0)y(t_0) \tag{3.2.66}$$

および

$$\Theta(t,t_0) = \left\{1 - \int_{t_0}^{t} dt'\mathcal{G}(t,t')\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t')\right)\mathcal{P}G^{\mathrm{I}}(t,t')\right\}^{-1} \tag{3.2.67}$$

である．

以上まとめると，(3.2.50) および (3.2.64) が非平衡量子系のダイナミクスを定める基本方程式である．

3.3 摂動展開公式

基本式 (3.2.50) および (3.2.64) を具体的な問題に適用するときに有用な展開公式を導いておく．

3.3.1 TC 型の展開公式

まず，(3.2.47) の t_0 のかわりに t' を代入した表式を展開すると

$$\mathcal{G}(t,t') = 1 + \int_{t'}^{t} dt'' \left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t'')\right) + \int_{t'}^{t} dt'' \int_{t'}^{t''} dt''' \left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t'')\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t''')\right) + \cdots \tag{3.3.68}$$

となる．この結果を (3.2.51) に用いると (3.2.50) の右辺第 2 項は，

$$\int_{t_0}^{t} dt' \Phi(t,t') x(t') = \int_{t_0}^{t} dt' \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t')\right) x(t') + \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t'}^{t} dt'' \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t'')\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t')\right) x(t') + \cdots \tag{3.3.69}$$

という形に展開される．さらに (3.3.69) の右辺第 2 項は 2 重積分の積分範囲を変更することにより，

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_2)\right) x(t_2) \tag{3.3.70}$$

となる．

同様にして積分範囲の変更を高次の項に対して行うと

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} dt' \Phi(t,t') x(t') &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right) x(t_1) \\ &+ \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_2)\right) x(t_2) + \cdots \\ &+ \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right) \\ &\qquad \times \left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right) \cdots \left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_{n-1})\right) x(t_{n-1}) \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{3.3.71}$$

という展開公式を得ることができる．ここで，時間の並び順は n 次の項で

$$t \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_{n-1} \tag{3.3.72}$$

となっていることに注意しよう．

また，(3.2.52) の $I(t,t_0)$ に対してはただちに展開公式を求めることができて，

$$\begin{aligned}I(t,t_0) &= \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)y(t_0)\\&\quad+\left\{\int_{t_0}^{t}dt_1\left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\right.\\&\quad+\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_2)\right)\\&\quad+\cdots\\&\quad+\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-2}}dt_{n-1}\left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\cdots\\&\quad\left.\times\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_{n-1})\right)+\cdots\right\}y(t_0)\end{aligned}\tag{3.3.73}$$

である．(3.3.71) と (3.3.73) を比較すると 2 次以上の “係数” が一致していることがわかるであろう．

後に例をあげるが，これらの展開公式は具体的問題を扱う際の出発点となる．同様の展開公式は (3.2.64) に対しても存在する．以下にこれを示そう．

3.3.2 TCL 型の展開公式

まず (3.2.67) は

$$\Theta(t,t_0)=1+\Sigma(t,t_0)+\Sigma(t,t_0)^2+\cdots\tag{3.3.74}$$

と展開できる．ここに

$$\Sigma(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}dt'\mathcal{G}(t,t')\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t')\right)\mathcal{P}G(t,t')\tag{3.3.75}$$

である．

次に $\Sigma(t,t_0)$ を $L_1^{\mathrm{I}}(t)$ の冪級数に展開すると

$$\Sigma(t,t_0)=\Sigma^{(1)}(t,t_0)+\Sigma^{(2)}(t,t_0)+\cdots\tag{3.3.76}$$

となる．上付き数字は $L_1^{\mathrm{I}}(t)$ の次数を表す．このとき，$\mathcal{G}(t,t')$ の展開公式 (3.3.68) に加えて，

$$G^{\mathrm{I}}(t,t') = 1 + \int_{t'}^{t} dt'' iL_1^{\mathrm{I}}(t'') + \int_{t'}^{t} dt'' \int_{t'}^{t''} dt''' iL_1^{\mathrm{I}}(t''') iL_1^{\mathrm{I}}(t'') + \cdots \tag{3.3.77}$$

を用いて (3.3.75) を展開する．具体的に書き下せば，

$$\Sigma^{(1)}(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\mathcal{P}, \tag{3.3.78}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2)}(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \Big\{&\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_2)\right)\mathcal{P} \\ &- \left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_2)\right)\mathcal{P}\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\Big\}\end{aligned} \tag{3.3.79}$$

である．これらの結果を (3.3.74) に用いれば，(3.2.65) より

$$\begin{aligned}K(t)x(t) = &-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)x(t) \\ &+ \Bigg\{\int_{t_0}^{t} dt_1 \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right) \\ &+ \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \Big[\left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_2)\right) \\ &- \left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-i\mathcal{Q}L_1^{\mathrm{I}}(t_2)\right)\left(-i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\Big] + \cdots\Bigg\}x(t)\end{aligned} \tag{3.3.80}$$

を得る．

TC 型の展開公式 (3.3.71) と (3.3.80) とを比較してみると，(3.3.71) では被積分関数の構成要素である $L_1^{\mathrm{I}}(t_j)$ が時間順に並んでいるのに対して，(3.3.80) では時間順が必ずしも守られていない．一見したところ (3.3.80) の右辺は複雑に見えるが規則性がある．すなわち，$K(t)$ を $L_1^{\mathrm{I}}(t)$ の冪で展開すると，

$$K(t) = K^{(1)}(t) + K^{(2)}(t) + K^{(3)}(t) + \cdots \tag{3.3.81}$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
K^{(1)}(t) &= -i\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t), \\
K^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{t} dt_1 k^{(2)}(t,t_1), \\
&\vdots \\
K^{(n)}(t) &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} k^{(n)}(t,t_1,\cdots,t_{n-1}) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.3.82}
$$

であり，被積分関数の最低次の項は，

$$
k^{(2)}(t) = \mathcal{P}\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right) - \mathcal{P}\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\mathcal{P}\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right) \tag{3.3.83}
$$

$$
\equiv \mathcal{P}(0)(1) - \mathcal{P}(0)\mathcal{P}(1) \tag{3.3.84}
$$

となる．(3.3.84) では省略的な記法を導入しており，

$$
(0) = \left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right), \quad (1) = \left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right) \tag{3.3.85}
$$

などとかく．この記法で 3 次は，

$$
\begin{aligned}
k^{(3)}(t,t_1,t_2) = {}& \mathcal{P}(0)(1)(2) - \mathcal{P}(0)(1)\mathcal{P}(2) - \mathcal{P}(0)(2)\mathcal{P}(1) \\
& - \mathcal{P}(0)\mathcal{P}(1)(2) + \mathcal{P}(0)\mathcal{P}(1)\mathcal{P}(2) + \mathcal{P}(0)\mathcal{P}(2)\mathcal{P}(1)
\end{aligned}
\tag{3.3.86}
$$

である．これらの例からわかるように (3.3.84), (3.3.86) の右辺に現れる各項の符号は，各項の中の射影演算子 $\mathcal{P}$ の個数を q とかくと，$(-)^{q-1}$ である．

以上まとめると，n 次の項は，

$$
k^{(n)}(t,t_1,\cdots,t_{n-1}) = \sum(-)^{q-1}\mathcal{P}(0)\cdots(j)\mathcal{P}(k)\cdots(l)\mathcal{P}(m)\cdots \tag{3.3.87}
$$

となる．このとき，次の規則を満たすように和をとればよい．

1. 各項において $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(-iL_1^{\mathrm{I}}(t))$ は常に先頭にある．

2. $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}$ に囲まれた項の中では時間順序が保たれている．すなわち，

$$t \geq \cdots \geq t_j, \quad t_k \geq \cdots \geq t_l, \quad t_m \geq \cdots$$

が成り立つ．

3. 各項の符号は $(-)^{q-1}$ である．

ところで，(3.3.86) の右辺第 1 項 $\mathcal{P}(0)(1)(2)$ は，$\mathcal{P}\cdots\mathcal{P}$ という形になっていないにもかかわらず，時間順 $t \geq t_1 \geq t_2$ は保たれているので，規則 2 は成立しないように見える．しかし，(3.3.80) からわかるように，$K(t)$ は必ず $K(t)x(t)$ という形で現れる．$x(t)=\mathcal{P}W^{\mathrm{I}}(t)$ であり $\mathcal{P}^2=\mathcal{P}$ が成り立っているので，(3.3.86), (3.3.87) などの各項の最後に $\mathcal{P}$ を入れても結果に変わりはない．したがって，(3.3.87) を計算する際には，

$$\mathcal{P}(0)(1)(2) \longrightarrow \mathcal{P}(0)(1)(2)\mathcal{P} \tag{3.3.88}$$

のようにしてよいので，規則 2 は成り立っていることが了解されよう．

次に (3.2.66) の $\mathcal{I}(t,t_0)$ を展開すると

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t,t_0) = {}& \mathcal{P}\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)y(t_0)\\ &+\left\{\int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}(0)\mathcal{Q}(1) + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left[\mathcal{P}(0)\mathcal{Q}(1)\mathcal{Q}(2) - \mathcal{P}(0)\mathcal{Q}(2)\mathcal{Q}(1)\right]\right.\\ &\left.+\cdots\right\}y(t_0)\end{aligned} \tag{3.3.89}$$

となって (3.3.80) の中味と同じになる．

3.3.3 2 次の摂動計算

注目している S 系と，それを取り囲む R 系との相互作用が弱い場合，TCL 型方程式 (3.2.64) を，

$$\dot{x}(t) = \left\{K^{(1)}(t,t_0) + K^{(2)}(t,t_0)\right\}x(t) + \mathcal{I}(t,t_0) \tag{3.3.90}$$

と近似することができる．初期値に依存する $\mathcal{I}(t,t_0)$ は (3.2.66) で与えられてい

るが，$W^{\mathrm{I}}(t_0)$ は

$$y(t_0) = \mathcal{Q}W^{\mathrm{I}}(t_0) = 0 \tag{3.3.91}$$

を満たす場合を考えよう．このとき $\mathcal{I}(t, t_0) = 0$ である．また $L_1^{\mathrm{I}}(t)$ の性質として，

$$\mathcal{P}\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)x(t) = 0 \tag{3.3.92}$$

を仮定する．すなわち，$K^{(1)}(t, t_0)x(t) = 0$ である．これらの条件，(3.3.91) および (3.3.92)，が具体的にどういうことをいっているのかは，後に吟味することとして前に進もう．このとき

$$\dot{x}(t) = K^{(2)}(t, t_0)x(t) \tag{3.3.93}$$

である．$K^{(2)}(t, t_0)$ は (3.3.82) および (3.3.83) で与えられるが，(3.3.83) の右辺第 2 項は条件 (3.3.92) により寄与しない．したがって (3.3.93) は，

$$\mathcal{P}\dot{W}^{\mathrm{I}}(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\mathcal{P}W^{\mathrm{I}}(t) \tag{3.3.94}$$

となる．ここで $\mathcal{P}$ として (3.1.4) を用いることにしよう．さらに

$$\rho^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{Tr_R} W^{\mathrm{I}}(t) \tag{3.3.95}$$

とかけば，$\rho^{\mathrm{I}}(t)$ は注目している S 系の時間変化を表す縮約された密度演算子（reduced density operator）である．したがって (3.3.94) より

$$\dot{\rho}^{\mathrm{I}}(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathrm{Tr_R}\left\{\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\rho_{\mathrm{R}}\right\}\rho^{\mathrm{I}}(t) \tag{3.3.96}$$

という基本方程式を得る．以下で (3.3.96) の右辺の計算を段階をふみながら進めよう．まず (3.1.3) を思い起こせば，

$$-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\rho_{\mathrm{R}}\rho^{\mathrm{I}}(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H_1^{\mathrm{I}}(t_1),\ \rho_{\mathrm{R}}\rho^{\mathrm{I}}(t)\right] \tag{3.3.97}$$

であるが，この先に進むには相互作用ハミルトニアン H_1 を具体的に指定しなければならない．比較的単純ではあるが重要な相互作用は，

$$H_1 = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{A} = \sum_{\mu=x,y,z} R^{\mu}A^{\mu} \tag{3.3.98}$$

$$= \sum_{\nu=\pm,0} R^{\bar{\nu}}A^{\nu} \tag{3.3.99}$$

で表される内積型である．ここに，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ S 系と R 系の演算子である．(3.3.98) は内積の定義そのものであるが，後の便宜のために (3.3.99) では，

$$R^{\pm} = \frac{1}{2}(R^x \pm iR^y), \quad R^0 = R^z, \tag{3.3.100}$$

$$A^{\pm} = A^x \pm iA^y, \quad A^0 = A^z \tag{3.3.101}$$

という記法を用いている．また，$\bar{\nu} = -\nu$ である．

ここで (3.3.97) に登場する $H_1^{\mathrm{I}}(t)$ は (3.2.29) より，

$$H_1^{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{e}^{iH_0t/\hbar}H_1\mathrm{e}^{-iH_0t/\hbar} \tag{3.3.102}$$

で与えられており，S 系のハミルトニアンを H_{S}，R 系のハミルトニアンを H_{R} とかけば，

$$H_0 = H_{\mathrm{S}} + H_{\mathrm{R}} \tag{3.3.103}$$

である．S 系の演算子と R 系の演算子は可換であるとする．すなわち，

$$[H_{\mathrm{S}}, H_{\mathrm{R}}] = 0 \tag{3.3.104}$$

とする．したがって (3.3.102) は

$$H_1^{\mathrm{I}}(t) = \sum_{\nu} R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t) A^{\mathrm{I},\nu}(t) \tag{3.3.105}$$

となる．ここで，(3.3.105) より，

$$R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t) = \mathrm{e}^{iH_0 t/\hbar} R^{\bar{\nu}} \mathrm{e}^{-iH_0 t/\hbar} = \mathrm{e}^{iH_{\mathrm{R}} t/\hbar} R^{\bar{\nu}} \mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{R}} t/\hbar}, \tag{3.3.106}$$

$$A^{\mathrm{I},\nu}(t) = \mathrm{e}^{iH_0 t/\hbar} A^{\nu} \mathrm{e}^{-iH_0 t/\hbar} = \mathrm{e}^{iH_{\mathrm{S}} t/\hbar} A^{\nu} \mathrm{e}^{-iH_{\mathrm{S}} t/\hbar} \tag{3.3.107}$$

である．これらの結果を使うと，(3.3.97) は

$$\begin{aligned} -iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\rho_{\mathrm{R}}\rho^{\mathrm{I}}(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_{\nu'} \Big\{ & R^{\mathrm{I},\bar{\nu}'}(t_1)\rho_{\mathrm{R}}[A^{\nu'}(t_1),\ \rho(t)] \\ & + [R^{\bar{\nu}'}(t_1),\ \rho_{\mathrm{R}}]\rho(t)A^{\nu'}(t_1) \Big\} \end{aligned} \tag{3.3.108}$$

となる．ここで (3.3.108) を得る際に，

$$[XY, Z] = X[Y, Z] + [X, Z]Y, \quad [X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z \tag{3.3.109}$$

という交換関係を使っている．

同様にして，

$$\begin{aligned} & \left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)\right)\left(-iL_1^{\mathrm{I}}(t_1)\right)\rho_{\mathrm{R}}\rho^{\mathrm{I}}(t) \\ & = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_{\nu,\nu'} \Big\{ R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t) R^{\mathrm{I},\bar{\nu}'}(t_1)\rho_{\mathrm{R}} \Big[A^{\mathrm{I},\nu}(t),\ \Big[A^{\mathrm{I},\nu'}(t_1),\ \rho^{\mathrm{I}}(t)\Big]\Big] \\ & \quad + R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t)\Big[R^{\mathrm{I},\bar{\nu}'}(t_1),\ \rho_{\mathrm{R}}\Big]\Big[A^{\mathrm{I},\nu}(t),\ \rho^{\mathrm{I}}(t)A^{\mathrm{I},\nu'}(t_1)\Big] \\ & \quad + (\text{その他の項}) \Big\} \end{aligned} \tag{3.3.110}$$

である．(3.3.110) で（その他の項）は，

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\text{その他の項}) = 0$$

となるので，(3.3.106) より，

$$\dot{\rho}^{\mathrm{I}}(t)=\frac{1}{\hbar^2}\sum_{\nu,\nu'=\pm,0}\int_{t_0}^{t}dt_1\left\{\langle R^{\mathrm{I},\bar{\nu}'}(t_1)R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t)\rangle_{\mathrm{R}}\left[A^{\mathrm{I},\nu}(t),\ \rho^{\mathrm{I}}(t)A^{\mathrm{I},\nu'}(t_1)\right]\right.$$
$$\left.+\langle R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t)R^{\mathrm{I},\bar{\nu}'}(t_1)\rangle_{\mathrm{R}}\left[A^{\mathrm{I},\nu'}(t_1)\rho^{\mathrm{I}}(t),\ A^{\mathrm{I},\nu}(t)\right]\right\} \tag{3.3.111}$$

という基本方程式を得る．この式に現れる係数を環境系の相関関数とよぶ．(3.3.111) はS系とR系とが弱く結合している場合，S系のダイナミクスを記述するTCL型の**量子マスター方程式**である．この表式の中で $\langle\ \bullet\ \rangle_{\mathrm{R}}$ は，

$$\langle\ \bullet\ \rangle_{\mathrm{R}}=\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\left(\bullet\rho_{\mathrm{R}}\right) \tag{3.3.112}$$

で定義された環境変数についての平均値で，**熱浴平均**とよばれることがある．もしも (3.3.111) の中の平均量が $\bar{\nu}'+\bar{\nu}=0$，すなわち $\nu'=-\nu=\bar{\nu}$ 以外ではゼロとなる場合には，

$$\dot{\rho}^{\mathrm{I}}(t)=\frac{1}{\hbar^2}\sum_{\nu=\pm,0}\int_{t_0}^{t}dt_1\left\{\langle R^{\mathrm{I},\nu}(t_1)R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t)\rangle_{\mathrm{R}}\left[A^{\mathrm{I},\nu}(t),\ \rho^{\mathrm{I}}(t)A^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t_1)\right]\right.$$
$$\left.+\langle R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t)R^{\mathrm{I},\nu}(t_1)\rangle_{\mathrm{R}}\left[A^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t_1)\rho^{\mathrm{I}}(t),\ A^{\mathrm{I},\nu}(t)\right]\right\} \tag{3.3.113}$$

となる．

さらに $A^{\mathrm{I},\nu}(t)$ が，系の固有角振動数 ω_0 を用いて，

$$A^{\mathrm{I},\nu}(t)=\mathrm{e}^{i\nu\omega_0 t}A^{\nu} \tag{3.3.114}$$

と表され，環境系の相関関数が時間の差にしかよらない場合，すなわち，

$$\langle R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t)R^{\mathrm{I},\nu}(t_1)\rangle_{\mathrm{R}}=\langle R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(t-t_1)R^{\mathrm{I},\nu}(0)\rangle_{\mathrm{R}} \tag{3.3.115}$$

であるとき，(3.3.113) は，

$$\dot{\rho}^{\mathrm{I}}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\nu=\pm,0} \left\{ \int_0^{t-t_0} d\tau \mathrm{e}^{i\nu\omega_0\tau} \langle R^{\mathrm{I},\nu}(0) R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(\tau) \rangle_{\mathrm{R}} \left[A^{\nu}, \ \rho^{\mathrm{I}}(t) A^{\bar{\nu}} \right] \right.$$
$$\left. + \int_0^{t-t_0} d\tau \mathrm{e}^{-i\nu\omega_0\tau} \langle R^{\mathrm{I},\nu}(\tau) R^{\mathrm{I},\bar{\nu}}(0) \rangle_{\mathrm{R}} \left[A^{\nu} \rho^{\mathrm{I}}(t), \ A^{\bar{\nu}} \right] \right\} \quad (3.3.116)$$

という比較的単純な形となる．ここで得られた (3.3.113) および (3.3.116) は，後の章で示されるように多くの具体的問題を扱う際の出発点となる．

ではＳ系とＲ系との間の相互作用が必ずしも弱くはない場合の扱いはどうしたらよいであろう．ことに相互作用が強い場合，扱いは困難となるが，(3.3.71) のすべての項を無限次まで，厳密に求め得る場合もある．

3.4 Heisenberg 描像——森の公式——

状態ベクトルあるいは密度行列の時間発展を追う立場が Schrödinger 描像であり，物理量を表す演算子の時間発展を追うのが，Heisenberg 描像であった．ここでは，(1.9.187) から出発しよう．(3.1.3) の記法を使えば，

$$\dot{A}(t) = iLA(t) \quad (3.4.117)$$

が Heisenberg の運動方程式である．(3.4.117) を形式的に解くと，

$$A(t) = \mathrm{e}^{iLt} A \quad (3.4.118)$$

であるので，時間発展は $G(t) \equiv \mathrm{e}^{iLt}$ によって行われている．時間発展演算子 $G(t)$ は，

$$\dot{G}(t) = G(t) iL \quad (3.4.119)$$

を満たしている．(3.4.119) の右辺で，iL を $G(t)$ の右にかいたのは，対応関係 (3.2.57), (3.2.58) を念頭においているからである．ここで，

$$x(t) = G(t)\mathcal{P}, \quad y(t) = G(t)\mathcal{Q} \quad (3.4.120)$$

を導入すると，(3.1.13), (3.1.14) を得たときと同様な手続きにより，

$$\dot{x}(t) = x(t)iL\mathcal{P} + y(t)iL\mathcal{P} \tag{3.4.121}$$

および

$$\dot{y}(t) = x(t)iL\mathcal{Q} + y(t)iL\mathcal{Q} \tag{3.4.122}$$

を導くことができる．ここで，(3.1.17) の導出法にならって (3.4.121) と (3.4.122) から $y(t)$ を消去し，$t_0 = 0$ とおくと，

$$\dot{x}(t) = x(t)iL\mathcal{P} + \int_0^t d\tau x(\tau)iL\mathcal{Q}\mathrm{e}^{iL\mathcal{Q}(t-\tau)}iL\mathcal{P} + \mathcal{Q}\mathrm{e}^{iL\mathcal{Q}t}iL\mathcal{P} \tag{3.4.123}$$

となる．

また，射影演算子として，

$$\mathcal{P}\bullet = \left(\bullet,\ A^\dagger\right)\left(A,\ A^\dagger\right)^{-1}A \tag{3.4.124}$$

を用いることとする．(3.4.124) は任意の物理量 $\bullet$ の A 方向成分を表す．ここに，(　,　) という記号は問題に即して適宜導入された内積である．この $\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ を満たすことはただちに了解されよう．また，$\mathcal{P}A = A$ が成り立つ．したがって (3.4.123) の両辺を A に演算することにより，

$$\dot{A}(t) = i\Omega A(t) + \int_0^t d\tau \Phi(t-\tau)A(\tau) + f(t) \tag{3.4.125}$$

という基本式を得る．ここに，

$$\Omega = \left(LA,\ A^\dagger\right)\left(A,\ A^\dagger\right)^{-1}, \tag{3.4.126}$$

$$\Phi(t-\tau) = \left(iL\mathcal{Q}\mathrm{e}^{iL\mathcal{Q}(t-\tau)}iLA,\ A^\dagger\right)\left(A,\ A^\dagger\right)^{-1} \tag{3.4.127}$$

および

$$f(t) = \mathcal{Q}\mathrm{e}^{iL\mathcal{Q}t} iLA \tag{3.4.128}$$

を定義している．内積をうまく定めることによって，

$$\Phi(t-\tau) = \left(f(t),\ f(\tau)^{\dagger}\right)\left(A,\ A^{\dagger}\right)^{-1} \tag{3.4.129}$$

を示すことができる．ここで得られた (3.4.125)-(3.4.129) の結果を森（Mori）の公式とよぶ．基本方程式 (3.4.125) は，物理量 $A(t)$ の時間変化を，力学的に運動する部分（右辺第 1 項），減衰を与える部分（第 2 項），揺動する部分（第 3 項），という 3 つの部分に系統的に分離することができた，と語っている．森の得た結果は古典的な Langevin（ランジュヴァン）方程式（付録 A.6 節を参照）ときわめてよい対応関係を有していることがわかるであろう．

3.5 密度行列の従う基本式と物理量の従う基本式 ——両者の変換——

量子系の時間発展を追う際には，2 通りの立場があり，3.1 節では密度行列が，また 3.4 節では物理量が主役を務めていた．TC 型の場合，(3.1.17) と (3.4.123) がそれぞれの基本式である．後者においては，さらに物理量 A に演算せねばならないのだが．

3.1 節と 3.4 節を比較して基本式の導出過程を調べると，両者の間には以下の対応関係が見出される．

規則 1．基本構成要素

$$\begin{array}{ccc} \text{密度行列に対して} & & \text{物理量に対して} \\ \left.\begin{array}{l} -iL \\ \mathcal{P} \end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} iL \\ \mathcal{P} \end{array}\right. \end{array} \tag{3.5.130}$$

規則 2. 積の反転規則

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{Q}(-iL)\\ \mathrm{e}^{\mathcal{Q}(-iL)(t-\tau)}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}iL\mathcal{Q}\\ \mathrm{e}^{iL\mathcal{Q}(t-\tau)}\end{array}\right. \tag{3.5.131}$$

規則 2′. 積の反転規則

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{P}\mathrm{e}^{-iL(t-t_0)}\\ \mathcal{Q}\mathrm{e}^{-iL(t-t_0)}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathrm{e}^{iL(t-t_0)}\mathcal{P}\\ \mathrm{e}^{iL(t-t_0)}\mathcal{Q}\end{array}\right. \tag{3.5.132}$$

一例として，密度行列に対する TC 型方程式 (3.1.17) の右辺第 2 項を考えよう．この項は

$$\int_{t_0}^{t} dt'\mathcal{P}(-iL)\mathrm{e}^{\mathcal{Q}(-iL)(t-t')}\mathcal{Q}(-iL)\mathcal{P}\mathrm{e}^{-iLt'} \tag{3.5.133}$$

である．ここでは $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $-iL$ などの構成要素の並び順を考えているので最後の $W(t_0)$ はかいていない．

上の規則 1，2 を (3.5.133) に適用するとただちに

$$\longrightarrow \int_{t_0}^{t} dt'\mathrm{e}^{iLt'}\mathcal{P}iL\mathcal{Q}\mathrm{e}^{iL\mathcal{Q}(t-t')}iL\mathcal{P} \tag{3.5.134}$$

を得る．これは (3.4.123) の右辺第 2 項に他ならない．

この例からわかるように密度行列に対する TC 型の基本式 (3.1.17) から，物理量に対する TC 型の基本式 (3.4.123) が容易に得られる．同様にして密度行列に対する TCL 型の基本式 (3.1.24) から，物理量に対する TCL 型の基本式を得ることができる．

さらに相互作用描像では規則 1，2，2′ の中の諸量を次のように置き換えればよい．

$$\left.\begin{array}{l} -iL \\ \mathcal{Q}(-iL) \\ \mathrm{e}^{-iL(t-\tau)} \\ \mathrm{e}^{\mathcal{Q}(-iL)(t-\tau)} \\ \mathrm{e}^{iL(t-\tau)} \\ \mathrm{e}^{iL\mathcal{Q}(t-\tau)} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -iL_1^{\mathrm{I}}(t) \\ \mathcal{Q}(-iL_1^{\mathrm{I}}(t)) \\ \mathrm{T}_+\mathrm{e}^{\int_\tau^t dt'(-iL_1^{\mathrm{I}}(t'))} \\ \mathrm{T}_+\mathrm{e}^{\int_\tau^t dt'\mathcal{Q}(-iL_1^{\mathrm{I}}(t'))} \\ \mathrm{T}_-\mathrm{e}^{\int_\tau^t dt' iL_1^{\mathrm{I}}(t')} \\ \mathrm{T}_-\mathrm{e}^{\int_\tau^t dt' iL_1^{\mathrm{I}}(t')\mathcal{Q}} \end{array}\right. \tag{3.5.135}$$

このような手続きによって密度行列と物理量の時間発展を定める基本方程式を得ることができる．本章で提示した摂動展開公式は，量子マスター方程式の導出に有用であり，第 4-6 章でさまざまな問題に適用される．物理量それ自身を追うという立場の代表は森理論であるが，本章の結果を用いると熱浴系を消去する，という方法論を展開することも可能となる．このことは第 7 章のテーマとなる．

第II部
緩和現象と量子情報の物理

自然界，あるいは実験室において我々がその性質を調べようとする物理系は，それ自体が孤立しているのではなく，それを取り巻く非常に大きな外部環境と複雑に相互作用をしていることがほとんどである．外部環境の影響下におかれた物理系は不可逆的な時間発展をするが，このような時間発展の性質を量子力学の基礎方程式から説明することは非平衡量子統計力学における重要な問題である．最近注目されている量子情報処理・情報通信も外部環境の影響下におかれた量子系によって行われる．また，量子系が情報を担うためには必然的に非平衡状態を扱わなければならない．したがって，量子情報処理も非平衡量子統計力学の重要な研究対象である．実際に，量子情報処理に関連する多くの研究において，さまざまな非平衡量子統計力学の方法が用いられている．

第II部では，第I部第3章で定式化された量子マスター方程式を用いて，物理系の緩和現象と量子情報システムの性質を議論する．第4章では，最も基本的な量子系である大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンと調和振動子の緩和過程を考察する．また，外部環境の影響を確率過程として扱う場合の緩和過程についても議論する．第5章では，外部環境の影響によって量子系のエンタングルメントがどのように減衰していくかを調べる．エンタングルメントは，EPR（Einstein-Podolsky-Rosen）相関ともよばれ，量子力学に特有の相関であり，量子情報処理における重要なリソースである．第6章では，量子テレポーテーションと量子デンスコーディングにおける情報伝送特

性を量子マスター方程式を用いて解析する．量子テレポーテーションと量子デンスコーディングは量子状態のエンタングルメントを用いた情報伝送であり，量子通信の代表的なプロトコルである．

第4章

量子系の緩和現象

第３章で定式化された量子マスター方程式の理論は，さまざまな物理系の不可逆過程を記述することができる [19]．本章では，最も基本的な物理系である２準位系と調和振動子の非平衡ダイナミクスの問題に量子マスター方程式の理論を応用する．代表的な２準位系としては，大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンや単一光子の偏向状態があげられる．このような２準位系は離散変数量子情報処理システムにおける量子情報の基本単位である量子ビットの構成要素でもある [20]．近年，量子情報は量子力学の基礎のみならず情報通信技術においてもその重要性が増している [21]．たとえば，量子コンピュータは量子ビットの集団に対する変換と量子測定によって効率的な情報処理を行う．量子コンピュータを実現するためには，外部環境の影響下にある量子ビットの緩和現象の性質を理解して注意深く設計する必要がある．一方，調和振動子は量子化された電磁場（光子系）を構成する基本要素であり，物理学のさまざまな場面に登場する．特に，単一モードの光子系は量子光学における最も基本的なシステムであり，連続変数量子情報処理を担う重要なシステムでもある [22]．また，コヒーレント状態とよばれる調和振動子の状態の重ね合わせによって量子ビットを構成し，光学素子を用いて量子コンピュータを作るアイデアも提案されている．

このように２準位系や調和振動子は量子物理学として重要であるばかりでなく，量子情報においても本質的な役割を果たす．情報処理や情報通信は孤立系で行われるのではなく，外部環境の影響下にある開放系で行われるので，２準位系や調和振動子の緩和現象を理解することは量子情報処理システムの研究を進めるうえでも非常に重要である．本章で導かれた結果は，第５章でのエンタングルメントの緩和や第６章での量子通信を議論する場合の基礎となる．また，以下では２準位系を量子ビットとよぶことにする．

4.1 量子ビットの緩和過程

4.1.1 量子ビットの時間発展

量子ビットの量子力学的な性質は，2 次元 Hilbert（ヒルベルト）空間によって記述され，その量子状態や物理量はすべて 2 行 2 列のエルミート行列によって表現することができる．任意の 2×2 エルミート行列は，単位行列 $\mathbb{I}$ と 3 つの Pauli（パウリ）行列 $\sigma^x,\sigma^y,\sigma^z$ の線形結合として表すことができる．ここで，3 つの Pauli 行列 $\sigma^x,\sigma^y,\sigma^z$ は次の式で定義される．

$$\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma^y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma^z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{4.1.1}$$

このように定義された Pauli 行列は次の関係式を満足する．

$$[\sigma^j,\sigma^k]=2i\sum_{l=x,y,z}\epsilon_{jkl}\sigma^l,\quad \sigma^j\sigma^k=i\sum_{l=x,y,z}\epsilon_{jkl}\sigma^l\quad (j,k=x,y,z). \tag{4.1.2}$$

ここで，ϵ_{jkl} は $\epsilon_{xyz}=1$ を満足する 3 次元の 3 階完全反対称テンソルである*1．実際，任意の 2×2 エルミート行列は次のように表すことができる．

$$\begin{pmatrix}a&b\\b^*&c\end{pmatrix}=\frac{a+c}{2}\mathbb{I}+\frac{b+b^*}{2}\sigma^x+i\frac{b-b^*}{2}\sigma^y+\frac{a-c}{2}\sigma^z. \tag{4.1.3}$$

また，Pauli 行列 σ^z の固有値 1 と -1 に対応した固有ベクトルをそれぞれ $|0\rangle$，および $|1\rangle$ と表すことにする．

第 3 章で定式化された量子マスター方程式の一般論から，外部環境の影響下にある量子ビットの相互作用描像での量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ の時間発展は次の量子マスター方程式によって決定される．

---

*1 3 次元の 3 階完全反対称テンソル ϵ_{jkl} は，ϵ_{xyz} の添え字を偶数（奇数）回置換して得られる成分は 1 (-1) であり，その他の成分はゼロである．たとえば，$\epsilon_{xyz}=\epsilon_{zxy}=1, \epsilon_{zyx}=\epsilon_{xzy}=-1$, $\epsilon_{xxy}=\epsilon_{zyz}=0$ である．

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathrm{I}}(t) = \phi_{-+}(t)[\sigma^{-}\rho^{\mathrm{I}}(t), \sigma^{+}] + \phi^{*}_{-+}(t)[\sigma^{-}, \rho^{\mathrm{I}}(t)\sigma^{+}]$$
$$+\phi_{+-}(t)[\sigma^{+}\rho^{\mathrm{I}}(t), \sigma^{-}] + \phi^{*}_{+-}(t)[\sigma^{+}, \rho^{\mathrm{I}}(t)\sigma^{-}]$$
$$+\frac{1}{4}\phi_{zz}(t)[\sigma^{z}\rho^{\mathrm{I}}(t), \sigma^{z}] + \frac{1}{4}\phi^{*}_{zz}(t)[\sigma^{z}, \rho^{\mathrm{I}}(t)\sigma^{z}]. \qquad (4.1.4)$$

ここで，右辺に現れる 3 つの時間 t の関数 $\phi_{-+}(t), \phi_{+-}(t)$，および $\phi_{zz}(t)$ はそれぞれ次の式で定義される*2.

$$\phi_{-+}(t) = \frac{\lambda_{\perp}^{2}}{\hbar^{2}}\int_{0}^{t} dt'\, \langle R(t')R^{\dagger}(0)\rangle_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{i\omega t'}, \qquad (4.1.5)$$

$$\phi_{+-}(t) = \frac{\lambda_{\perp}^{2}}{\hbar^{2}}\int_{0}^{t} dt'\, \langle R^{\dagger}(t')R(0)\rangle_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-i\omega t'}, \qquad (4.1.6)$$

$$\phi_{zz}(t) = \frac{\lambda_{z}^{2}}{\hbar^{2}}\int_{0}^{t} dt'\, \langle R_{z}(t')R_{z}(0)\rangle_{\mathrm{R}}. \qquad (4.1.7)$$

ここで，$\hbar\omega$ は量子ビットの 2 つの量子状態のエネルギー差であり，パラメータ $\lambda_{\perp}$ と λ_{z} は量子ビットと外部環境の間の相互作用の強さを表す結合定数である．また，行列 $\sigma^{\pm}$ は $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^{x} \pm i\sigma^{y})$ で定義され，次のような行列で与えられる．

$$\sigma^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.1.8)$$

これらの行列は次の性質を満足する．

$$(\sigma^{\pm})^{2} = 0, \qquad \sigma^{\pm}\sigma^{\mp} = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma^{z}). \qquad (4.1.9)$$

外部環境の変数の相関時間*3が注目する時間スケールに比べて十分に短い場合，(4.1.5)-(4.1.7) の右辺の時間積分の上限は近似的に無限大に置き換えることがで

---

*2 前章では，注目するシステムと外部環境の相互作用ハミルトニアンを $H_{1} = \sigma^{x}R^{x} + \sigma^{y}R^{y} + \sigma^{z}R^{z}$ とおいたが，この章では相互作用ハミルトニアンを $H_{1} = (\lambda_{\perp}/\hbar)\sigma^{-}R + (\lambda_{\perp}/\hbar)\sigma^{+}R^{\dagger} + (\lambda_{z}/\hbar)\sigma^{z}R^{z}$ の形に表すことにする．

*3 ある時間を τ_{c} としたとき，$t > \tau_{c}$ を満足する時間 t に対して相関関数が $\langle R(t)R^{\dagger}(0)\rangle_{R} \approx 0$ となるとき，このような時間 τ_{c} を変数 $R(t)$ の相関時間とよぶ．

きる．このような近似は一般に **Markov**（マルコフ）近似とよばれる．Markov 近似が成り立つ場合，量子マスター方程式 (4.1.4) の右辺は露わな形では時間 t に依存しなくなる．

任意の時刻 t における相互作用描像での量子ビット状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ は，トレースが 1 に規格化された正の 2×2 エルミート行列で与えられる．したがって，量子ビットの状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ は単位行列 $\mathbb{I}$ と 3 つの Pauli 行列 $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$，および時間 t の実関数 $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ を用いて次の形に表すことができる．

$$\rho^{\mathrm{I}}(t) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{I} + a_x(t)\sigma^x + a_y(t)\sigma^y + a_z(t)\sigma^z\right]. \tag{4.1.10}$$

ここで，3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))^{\mathrm{T}}$ は **Bloch** ベクトルとよばれる．すなわち，量子ビットの状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ は Bloch ベクトルによって完全に決定される．量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ は正の行列でなければならない*4．量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ の 2 つの固有値を Bloch ベクトルを用いて表せば，$\frac{1}{2}(1 \pm |\boldsymbol{a}(t)|)$ となるので，量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ が正の行列であるためには，Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ は次の不等式を満足しなければならない．

$$|\boldsymbol{a}(t)| \leq 1. \tag{4.1.11}$$

ここで，等号が成り立つのは量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ が純粋状態の場合のみである*5．このことから量子ビットの状態が半径 1 の単位球の内部と表面の点によって表されることがわかる．また，Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ の各成分は量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ における Pauli 行列 $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ の平均値に等しい．

$$a_x(t) = \langle \sigma^x(t) \rangle = \mathrm{Tr}[\sigma^x \rho^{\mathrm{I}}(t)], \tag{4.1.12}$$

$$a_y(t) = \langle \sigma^y(t) \rangle = \mathrm{Tr}[\sigma^y \rho^{\mathrm{I}}(t)], \tag{4.1.13}$$

$$a_z(t) = \langle \sigma^z(t) \rangle = \mathrm{Tr}[\sigma^z \rho^{\mathrm{I}}(t)]. \tag{4.1.14}$$

---

*4 行列 A が正であるとは，行列 A のすべての固有値が非負であり，少なくとも 1 つ固有値がゼロでないことである．

*5 量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ が純粋状態であるための必要十分条件は $\rho^{\mathrm{I}\,2}(t) = \rho^{\mathrm{I}}(t)$ が成り立つことである．この条件は $(1/2)(1 \pm |\boldsymbol{a}(t)|) = (1/4)(1 \pm |\boldsymbol{a}(t)|)^2$ が成り立つことと等価なので，Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ で記述される量子状態が純粋状態であるための必要十分条件は，等号 $|\boldsymbol{a}(t)| = 1$ が成り立つことである．

したがって，量子マスター方程式 (4.1.4) から Pauli 行列の平均値に対する運動方程式を導き，その解を求めることによって，(4.1.10) から任意の時刻 t における量子ビットの状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ を決定することができる．このようにして量子状態が求められるのは，量子ビットに固有の性質である．

量子マスター方程式 (4.1.4) から Pauli 行列の性質 (4.1.2) を用いて，時刻 t での平均値 $\langle\sigma^{\pm}(t)\rangle = \frac{1}{2}[\langle\sigma^{x}(t)\rangle \pm i\langle\sigma^{y}(t)\rangle]$ と $\langle\sigma^{z}(t)\rangle$ の運動方程式を求めると次のようになる．

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma^{-}(t)\rangle = -\left[\phi_{-+}(t) + \phi^{*}_{+-}(t) + \frac{\phi_{zz}(t)+\phi^{*}_{zz}(t)}{2}\right]\langle\sigma^{-}(t)\rangle, \tag{4.1.15}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma^{+}(t)\rangle = -\left[\phi^{*}_{-+}(t) + \phi_{+-}(t) + \frac{\phi_{zz}(t)+\phi^{*}_{zz}(t)}{2}\right]\langle\sigma^{+}(t)\rangle, \tag{4.1.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\sigma^{z}(t)\rangle = &-\left[\phi_{-+}(t) + \phi^{*}_{-+}(t) + \phi_{+-}(t) + \phi^{*}_{+-}(t)\right]\langle\sigma^{z}(t)\rangle \\ &+ \left[\phi_{+-}(t) + \phi^{*}_{+-}(t) - \phi_{-+}(t) - \phi^{*}_{-+}(t)\right].\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

ここで，関数の和 $\phi_{-+}(t) + \phi^{*}_{+-}(t)$ の虚部は量子ビットの 2 つのエネルギー準位の差に対する補正を与える項を表す．以下では簡単のためにこの補正項を省略することにする*6．また，時間に依存する量子ビットの縦緩和時間 $T_1(t)$，横緩和時間 $T_2(t)$，および位相緩和時間 $T_{\mathrm{ph}}(t)$ をそれぞれ次の式で定義する．

$$\frac{1}{T_1(t)} = 2\Re\mathrm{e}[\phi_{-+}(t) + \phi^{*}_{+-}(t)], \tag{4.1.18}$$

$$\frac{1}{T_2(t)} = \Re\mathrm{e}[\phi_{-+}(t) + \phi^{*}_{+-}(t)] + \Re\mathrm{e}\,\phi_{zz}(t), \tag{4.1.19}$$

$$\frac{1}{T_{\mathrm{ph}}(t)} = \Re\mathrm{e}\,\phi_{zz}(t). \tag{4.1.20}$$

$\Re\mathrm{e}$ は，それ以下の部分の実数部を表す．これらの緩和時間の間には次の関係式が成り立つ．

$$\frac{1}{T_2(t)} = \frac{1}{2T_1(t)} + \frac{1}{T_{\mathrm{ph}}(t)}. \tag{4.1.21}$$

*6 補正項 $\Delta(t) = \Im\mathrm{m}[\phi_{-+}(t) + \phi^{*}_{+-}(t)]$ を含める場合には，最終結果において ωt を $\omega t + \int_0^t dt'\Delta(t')$ で置き換えればよい（$\Im\mathrm{m}$ は，それ以下の部分の虚数部を表す）．

さらに，次の式で定義される時間 t に依存するパラメータ $\sigma(t)$ を導入する．

$$\sigma(t)=\frac{\Re\mathrm{e}[\phi^*_{+-}(t)-\phi_{-+}(t)]}{\Re\mathrm{e}[\phi^*_{+-}(t)+\phi_{-+}(t)]}. \tag{4.1.22}$$

このように定義されたパラメータ $T_1(t), T_2(t), \sigma(t)$ を用いれば，Pauli 行列の平均値 $\langle\sigma^{\pm}(t)\rangle$ と $\langle\sigma^z(t)\rangle$ に対する運動方程式は次のような簡単な形に表すことができる．

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma^-(t)\rangle=-\frac{1}{T_2(t)}\langle\sigma^-(t)\rangle, \tag{4.1.23}$$
$$\frac{d}{dt}\langle\sigma^+(t)\rangle=-\frac{1}{T_2(t)}\langle\sigma^+(t)\rangle, \tag{4.1.24}$$
$$\frac{d}{dt}\langle\sigma^z(t)\rangle=-\frac{1}{T_1(t)}[\langle\sigma^z(t)\rangle-\sigma(t)]. \tag{4.1.25}$$

Markov 近似が成り立つ場合には各緩和時間は時間 t に依存しない正の定数になり，これらの運動方程式はスピン緩和過程を記述する現象論的な Bloch 方程式に帰着する．また，時間 t に依存した緩和時間 $T_1(t)$ と横緩和時間 $T_2(t)$，およびパラメータ $\sigma(t)$ を用いると，量子マスター方程式 (4.1.4) は次のような形に表すことができる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathrm{I}}(t)=&\frac{1-\sigma(t)}{4T_1(t)}\left([\sigma^-\rho^{\mathrm{I}}(t),\sigma^+]+[\sigma^-,\rho^{\mathrm{I}}(t)\sigma^+]\right)\\&+\frac{1+\sigma(t)}{4T_1(t)}\left([\sigma^+\rho^{\mathrm{I}}(t),\sigma^-]+[\sigma^+,\rho^{\mathrm{I}}(t)\sigma^-]\right)\\&-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{T_2(t)}-\frac{1}{2T_1(t)}\right)[\sigma^z,[\sigma^z,\rho^{\mathrm{I}}(t)]].\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Pauli 行列の平均値 $\langle\sigma^{\pm}(t)\rangle$ と $\langle\sigma^z(t)\rangle$ に対する運動方程式 (4.1.23)-(4.1.25) の一般解を求めると次のようになる．

$$\langle\sigma^{\pm}(t)\rangle=\mathcal{F}_2(t,0)\langle\sigma^{\pm}(0)\rangle, \tag{4.1.27}$$
$$\langle\sigma^z(t)\rangle=\mathcal{F}_1(t,0)\langle\sigma^z(0)\rangle+\Sigma(t). \tag{4.1.28}$$

ここで，関数 $\mathcal{F}_k(t_1,t_2)(k=1,2)$ と $\Sigma(t)$ は次の式で与えられる．

$$\mathcal{F}_k(t_1,t_2)=\exp\left[-\int_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{T_k(t)}\right], \tag{4.1.29}$$

$$\Sigma(t)=\int_0^t dt'\,\frac{\sigma(t')}{T_1(t')}\mathcal{F}_1(t,t'). \tag{4.1.30}$$

また，関数 $\mathcal{F}_k(t_1,t_2)$ に対して，関係式 $\partial\mathcal{F}_1(t_1,t_2)/\partial t_2=\mathcal{F}_1(t_1,t_2)/T_1(t_2)$ が成り立つことに注意すれば，関数 $\Sigma(t)$ は次の形に表すことができる．

$$\Sigma(t)=\sigma(t)-\mathcal{F}_1(t,0)\sigma(0)-\int_0^t dt'\dot{\sigma}(t')\mathcal{F}_1(t,t'). \tag{4.1.31}$$

ここで，$\dot{\sigma}(t)=\partial\sigma(t)/\partial t$ である．特に，パラメータ $\sigma(t)$ が時間に依存しない場合 $(\sigma(t)=\sigma(0)\equiv\sigma_{\rm eq})$ には，関数 $\Sigma(t)$ は次のようになる．

$$\Sigma(t)=[1-\mathcal{F}_1(t,0)]\sigma_{\rm eq}. \tag{4.1.32}$$

このとき，Pauli 行列の z 成分の平均値 $\langle\sigma^z(t)\rangle$ は次の式で与えられる．

$$\langle\sigma^z(t)\rangle=\mathcal{F}_1(t,0)[\langle\sigma^z(0)\rangle-\sigma_{\rm eq}]+\sigma_{\rm eq}. \tag{4.1.33}$$

この場合，$\lim_{t\to\infty}\langle\sigma^z(t)\rangle=\sigma_{\rm eq}$ が成り立つので，パラメータ $\sigma_{\rm eq}$ が $\langle\sigma^z(t)\rangle$ の平衡状態での値に等しいことがわかる．

量子ビットの状態 $\rho^{\rm I}(t)$ を表す Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ の各成分の時間発展は次の式で与えられる．

$$a_x(t)=\mathcal{F}_2(t,0)a_x(0), \tag{4.1.34}$$

$$a_y(t)=\mathcal{F}_2(t,0)a_y(0), \tag{4.1.35}$$

$$a_z(t)=\mathcal{F}_1(t,0)a_z(0)+\Sigma(t). \tag{4.1.36}$$

これらの結果を (4.1.10) に代入することによって，量子ビットの時間発展を決定する量子マスター方程式 (4.1.4) の一般解は次の式で与えられる．

$$\rho^{\mathrm{I}}(t) = \frac{1}{2}\{1 + \mathcal{F}_2(t,0)a_x(0)\sigma^x + \mathcal{F}_2(t,0)a_y(0)\sigma^y + [\mathcal{F}_1(t,0)a_z(0) + \Sigma(t)]\sigma^z\}. \tag{4.1.37}$$

また，量子マスター方程式 (4.1.4) による量子ビットの状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ の時間発展は，Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ に対する次のようなアフィン変換と等価であることがわかる．

$$\boldsymbol{a}(t) = \mathsf{L}(t)\boldsymbol{a}(0) + \boldsymbol{c}(t). \tag{4.1.38}$$

ここで，行列 $\mathsf{L}(t)$ とベクトル $\boldsymbol{c}(t)$ は次の式で与えられる．

$$\mathsf{L}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_2(t,0) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_2(t,0) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_1(t,0) \end{pmatrix}, \tag{4.1.39}$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Sigma(t) \end{pmatrix}. \tag{4.1.40}$$

4.1.2 量子ビットチャンネル

初期時刻 $(t=0)$ での量子状態 $\rho(0)\ (=\rho^{\mathrm{I}}(0))$ と任意の時刻 t での量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ を結ぶ写像 $\mathcal{L}_t$ は一般に量子チャンネルとよばれる．すなわち，量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ は次の式によって定義される．

$$\rho^{\mathrm{I}}(t) = \mathcal{L}_t\rho(0). \tag{4.1.41}$$

この式の両辺に (4.1.37) で与えられる量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ を代入することによって次の式が得られる．

$$1 + \Sigma(t)\sigma^z + a_x(0)\mathcal{F}_2(t,0)\sigma^x + a_y(0)\mathcal{F}_2(t,0)\sigma^y + a_z(0)\mathcal{F}_1(t,0)\sigma^z = \mathcal{L}_t 1 + a_x(0)\mathcal{L}_t\sigma^x + a_y(0)\mathcal{L}_t\sigma^y + a_z(0)\mathcal{L}_t\sigma^z. \tag{4.1.42}$$

ここで，Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(0)$ は条件 $|\boldsymbol{a}(0)| \leq 1$ を満たす範囲で任意に選べるので，この式の両辺が恒等的に等しくなるためには，Bloch ベクトルの成分毎に各項が等しくなければならない．したがって，次の一連の式が成り立たなければならない．

$$\mathcal{L}_t 1 = 1 + \Sigma(t)\sigma^z, \tag{4.1.43}$$

$$\mathcal{L}_t \sigma^x = \mathcal{F}_2(t,0)\sigma^x, \tag{4.1.44}$$

$$\mathcal{L}_t \sigma^y = \mathcal{F}_2(t,0)\sigma^y, \tag{4.1.45}$$

$$\mathcal{L}_t \sigma^z = \mathcal{F}_1(t,0)\sigma^z. \tag{4.1.46}$$

また，Pauli 行列 σ_z の固有ベクトルを $|0\rangle$，および $|1\rangle$ とするとき ($\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$, $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$)，これらの式から行列 $\mathcal{L}_t|j\rangle\langle k|$ を求めると次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 0| = {}& \frac{1}{2}[1 + \mathcal{F}_1(t,0) + \Sigma(t)]|0\rangle\langle 0| \\ & + \frac{1}{2}[1 - \mathcal{F}_1(t,0) - \Sigma(t)]|1\rangle\langle 1|, \end{aligned}\tag{4.1.47}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 1| = {}& \frac{1}{2}[1 - \mathcal{F}_1(t,0) + \Sigma(t)]|0\rangle\langle 0| \\ & + \frac{1}{2}[1 + \mathcal{F}_1(t,0) - \Sigma(t)]|1\rangle\langle 1|, \end{aligned}\tag{4.1.48}$$

$$\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 1| = \mathcal{F}_2(t,0)|0\rangle\langle 1|, \tag{4.1.49}$$

$$\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 0| = \mathcal{F}_2(t,0)|1\rangle\langle 0|. \tag{4.1.50}$$

これらの式で定義される量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ を用いれば，量子ビットのディコヒーレンスに関するさまざまな現象を解析することができる [23]．ところで，(4.1.47)-(4.1.50) は量子状態の時間発展を決める式であって物理量の時間発展を決める式でないことに注意しなければならない．たとえば，$\sigma^z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ と表すことができるが，(4.1.47) と (4.1.48) を用いて $\mathcal{L}_t\sigma^z$ を計算しても Pauli 行列 σ^z に対する Heisenberg の運動方程式の解にはならない．Heisenberg の運動方程式の解は写像 $\mathcal{L}_t$ の共役 $\mathcal{L}_t^\dagger$ を用いて $\sigma^z(t) = \mathcal{L}_t^\dagger\sigma^z$ で与えられる．ここで，共役写像 $\mathcal{L}_t$ は任意の演算子 A, B を用いて $\mathrm{Tr}[A(\mathcal{L}_t B)] = \mathrm{Tr}[(\mathcal{L}_t^\dagger A)B]$ によって定義される．

Markov 近似が成り立つ場合を考えよう．この場合，(4.1.18)-(4.1.20) で与えられる各緩和時間は時間によらない定数になる．さらに，外部環境が絶対温度 T

の熱平衡状態にある場合，久保-Martin-Schwinger（kubo・マーチン・シュウィンガー）条件*7から (4.1.22) で与えられるパラメータ $\sigma_{\mathrm{eq}}\,(=\sigma(t))$ は次の式で与えられる．

$$\sigma_{\mathrm{eq}} = -\tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_{\mathrm{B}}T}\right). \tag{4.1.51}$$

このとき，(4.1.47)-(4.1.50) で与えられる量子ビットの時間発展を記述する量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 0| &= \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-t/T_1})|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})|1\rangle\langle 1| \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})\sigma_{\mathrm{eq}}\,(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)\,, \end{aligned} \tag{4.1.52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 1| &= \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-t/T_1})|1\rangle\langle 1| \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})\sigma_{\mathrm{eq}}\,(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)\,, \end{aligned} \tag{4.1.53}$$

$$\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 1| = \mathrm{e}^{-t/T_2}|0\rangle\langle 1|, \tag{4.1.54}$$

$$\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 0| = \mathrm{e}^{-t/T_2}|1\rangle\langle 0|. \tag{4.1.55}$$

これらの式によって定義される量子チャンネルによる量子状態の時間発展は，スピン緩和過程を記述する現象論的な Bloch 方程式による時間発展と等価であるので，(4.1.52)-(4.1.55) で与えられる量子チャンネルは **Bloch チャンネル**とよばれる [24]．ところで，(4.1.52)-(4.1.55) に現れる縦緩和時間 T_1 と横緩和時間 T_2 の間には一般に不等式 $2T_1 \geq T_2$ が成り立つが，これは (4.1.52)-(4.1.55) で定義される Bloch チャンネル $\mathcal{L}_t$ が完全正写像*8であるための必要十分条件に他ならない．もし，純粋な位相緩和がなければ等号 $2T_1 = T_2$ が成り立つ．

外部環境の影響下での量子ビットの不可逆過程の性質を調べるためには，外部環

*7 絶対温度 T の熱平衡状態にシステムの演算子 A と B に対して $\langle A(t)B(t')\rangle = \langle B(t')A(t+i\hbar/(k_{\mathrm{B}}T))\rangle$ が成り立つ．これを KMS 条件という．

*8 任意の正の演算子 A に対して，$\mathcal{L}_tA > 0$ が成り立つとき，$\mathcal{L}_t$ は正写像とよばれる．また，恒等写像 $\mathcal{I}$ を用いて定義される写像 $\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I}$ が正写像であるとき，写像 $\mathcal{L}_t$ は完全正写像とよばれる．完全正写像は正写像であるが，正写像は必ずしも完全正写像にはならない．完全正写像は量子情報処理において重要な役割を果たす．たとえば，行列の転置をとる操作 $\mathcal{T}$ は正写像になるが，$(\mathcal{T}\otimes\mathcal{I})$ は正写像にはならない．$(\mathcal{T}\otimes\mathcal{I})$ で記述される操作は部分転置とよばれ，量子状態にエンタングルメントが存在するか否かを判定するための重要な操作である．

境に対して具体的にモデルを設定する必要がある．以下では，$\lambda_z = 0$ であり，外部環境は相関時間 τ_{R} の調和振動子の集団によって構成される場合を考える．このとき，$\phi_{zz}(t) = 0$ であり，付録 A.1 節の結果から適当な近似の下で関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は次の式で与えられる．

$$\phi_{-+}(t) = \phi_{-+}(\infty)\tau_{\mathrm{R}}\dot{f}(t), \tag{4.1.56}$$

$$\phi_{+-}(t) = \phi_{+-}(\infty)\tau_{\mathrm{R}}\dot{f}(t). \tag{4.1.57}$$

ここで，$\dot{f}(t) = df(t)/dt$ であり，関数 $f(t)$ は次の式で定義される．

$$f(t) = \frac{t}{\tau_{\mathrm{R}}} - 1 + \mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}}. \tag{4.1.58}$$

この場合，時間に依存する縦緩和時間 $T_1(t)$ と横緩和時間 $T_2(t)$ の間には等号 $T_2(t) = 2T_1(t)$ が成り立ち，横緩和時間 $T_2(t)$ は次の式で与えられる．

$$\frac{1}{T_2(t)} = \frac{\tau_{\mathrm{R}}\dot{f}(t)}{T_2}. \tag{4.1.59}$$

ここで，$T_2^{-1} = \Re\mathrm{e}[\phi_{-+}(\infty) + \phi_{+-}^*(\infty)]$ は現象論的な横緩和時間に対応する．また，パラメータ $\sigma(t)$ は (4.1.51) で与えられる．したがって，(4.1.27) と (4.1.28) はそれぞれ次のようになる．

$$\langle\sigma^{\pm}(t)\rangle = \gamma_t\langle\sigma^{\pm}(0)\rangle, \tag{4.1.60}$$

$$\langle\sigma^{z}(t)\rangle = \gamma_t^2\langle\sigma^{z}(0)\rangle + (1-\gamma_t^2)\sigma_{\mathrm{eq}}. \tag{4.1.61}$$

ここで，パラメータ γ_t は次の式で与えられる．

$$\gamma_t = \mathrm{e}^{-(\tau_{\mathrm{R}}/T_2)f(t)} \tag{4.1.62}$$

一方，(4.1.47)-(4.1.50) で与えられる量子ビットの時間発展を記述する量子チャンネルは次のようになる [24]．

$$\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 0| = \frac{1}{2}(1+\gamma_t^2)|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}(1-\gamma_t^2)|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}(1-\gamma_t^2)\sigma_{\mathrm{eq}}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|), \tag{4.1.63}$$

$$\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(1-\gamma_t^2)|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}(1+\gamma_t^2)|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}(1-\gamma_t^2)\sigma_{\mathrm{eq}}(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|), \tag{4.1.64}$$

$$\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 1| = \gamma_t|0\rangle\langle 1|, \tag{4.1.65}$$

$$\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 0| = \gamma_t|1\rangle\langle 0|. \tag{4.1.66}$$

さらに，量子ビットの状態を記述する Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ の時間発展は次の式で与えられる．

$$\boldsymbol{a}(t) = \mathsf{L}_t\boldsymbol{a}(0) + \boldsymbol{b}_t. \tag{4.1.67}$$

ここで，行列 L_t とベクトル $\boldsymbol{b}_t$ は次の式で与えられる．

$$\mathsf{L}_t = \begin{pmatrix} \gamma_t & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_t & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_t^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{\mathrm{eq}} \end{pmatrix}. \tag{4.1.68}$$

4.1.3 量子ビットの混合度と識別性

初期時刻 $(t=0)$ に純粋状態にあった量子ビットの状態が外部環境の影響によって混合状態になっていく様子を調べてみよう．量子状態の純粋度，すなわちどの程度純粋状態に近いかは線形エントロピー S_L によって評価することができる．量子状態 ρ の線形エントロピーは一般に次の式で定義される．

$$S_L = 1 - \mathrm{Tr}\rho^2. \tag{4.1.69}$$

純粋状態の線形エントロピーはゼロであり，線形エントロピーの値が大きくなるほど量子状態の純粋度は小さくなる．量子ビットの場合，最も純粋度が小さい状態は，完全にランダムな状態 $\frac{1}{2}\mathbb{I}$ であり，線形エントロピーの値は $\frac{1}{2}$ である．量子ビ

ットの線形エントロピーは 0 と $\frac{1}{2}$ の間の値をとる．量子ビットの状態の線形エントロピーは Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ を用いれば，次のような形に表すことができる．

$$S_L = \frac{1}{2}(1 - |\boldsymbol{a}(t)|^2). \tag{4.1.70}$$

量子ビットが初期時刻で純粋状態にある場合，等号 $|\boldsymbol{a}(0)|^2 = 1$ が成り立つので，(4.1.67) から $|\boldsymbol{a}(t)|^2$ を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}(t)|^2 &= \gamma_t^2 - \gamma_t^2(1-\gamma_t^2)a_z^2(0) \\ &\quad + 2\gamma_t^2(1-\gamma_t^2)\sigma_{\mathrm{eq}}a_z(0) + (1-\gamma_t^2)\sigma_{\mathrm{eq}}^2\end{aligned} \tag{4.1.71}$$

すべて可能な量子ビットの純粋状態に関して平均を行うと，$\overline{a_j(0)a_k(0)} = \frac{1}{3}\delta_{jk}$ $(j,k = x,y,z)$ が成り立つ．したがって，初期時刻における純粋状態に関して平均化された線形エントロピー $\overline{S_L}$ は次の式で与えられる．

$$\overline{S_L} = \frac{1}{2}(1-\gamma_t^2)\left[1 + \frac{1}{3}\gamma_t^2 - (1-\gamma_t^2)\sigma_{\mathrm{eq}}\right]. \tag{4.1.72}$$

平均化された線形エントロピー $\overline{S_L}$ は不等式 $\sigma_{\mathrm{eq}} \leq \frac{1}{3}$ が成り立つ場合には単調増加し，不等式 $\sigma_{\mathrm{eq}} > \frac{1}{3}$ が成り立つ場合には次の条件を満足する時刻で最大値をとる．

$$\gamma_t^2 = \frac{\sigma_{\mathrm{eq}}^2 - \frac{1}{3}}{\sigma_{\mathrm{eq}}^2 + \frac{1}{3}}. \tag{4.1.73}$$

平均化された線形エントロピー $\overline{S_L}$ を時間 t の関数としてプロットすると図 4.1 のようになる．この図から明らかなように，外部環境の変数の相関時間が長いほど量子ビットの量子状態の純粋性は緩やかに緩和する．

次に，量子ビットの 2 つの異なる量子状態の識別性が外部環境の影響によってどのように劣化していくかを調べよう．2 つの量子状態の識別性はさまざまなパラメータで定量化されるが，ここでは次の式で定義される忠実度（fidelity）とよばれるパラメータを用いて量子状態の識別性を評価することにする．

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left[\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1})^{1/2}\right]^2. \tag{4.1.74}$$

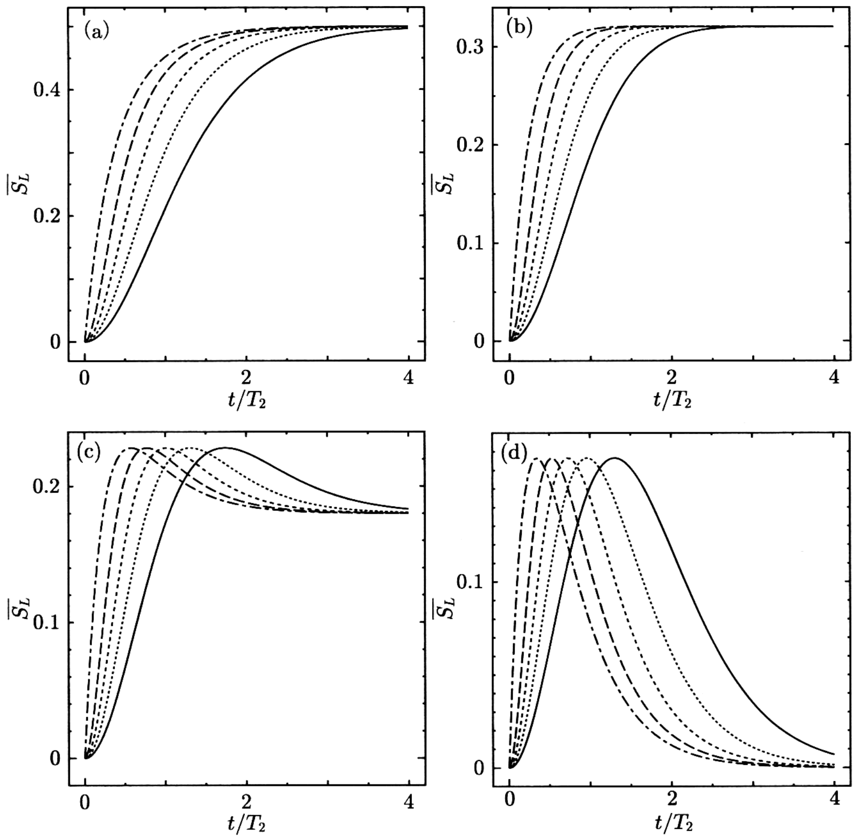


図 **4.1** 平均化された線形エントロピー $\overline{S_L}$ の時間依存性 [23]．ここで，(a) $\sigma_{\rm eq}=0.0$，(b) $\sigma_{\rm eq}=-0.6$，(c) $\sigma_{\rm eq}=-0.8$，および (d) $\sigma_{\rm eq}=-1.0$ である．また，各グラフにおいて——は $\tau_R/T_2=2.0$，……は $\tau_R/T_2=1.0$，-----は $\tau_R/T_2=0.5$，– –は $\tau_R/T_2=0.2$，–·–は $\tau_R/T_2=0.0$ である．

2つの量子状態が完全に一致する場合には $F(\rho_1,\rho_2)=1$ であり，適当な量子測定を行うことによって2つの量子状態が完全に識別できる場合には $F(\rho_1,\rho_2)=0$ である．忠実度の値が小さいほど2つの量子状態の識別性は良い．一般に，任意の量子状態に対して忠実度を計算することは非常に困難であるが，量子ビット状態の場合には忠実度は次の式で与えられる*9．

*9 この結果は次のようにして導くことができる．2×2 エルミート行列 $\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}$ の固有値を λ_1,λ_2 と表せば，忠実度は $F(\rho_1,\rho_2)=\lambda_1+\lambda_2+2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ となる．一方，$\lambda_1+\lambda_2={\rm Tr}(\rho_1\rho_2)$，および $\lambda_1\lambda_2=\det\rho_1\det\rho_2$ が成り立つ．また，各量子状態 ρ_k の Bloch ベクトル

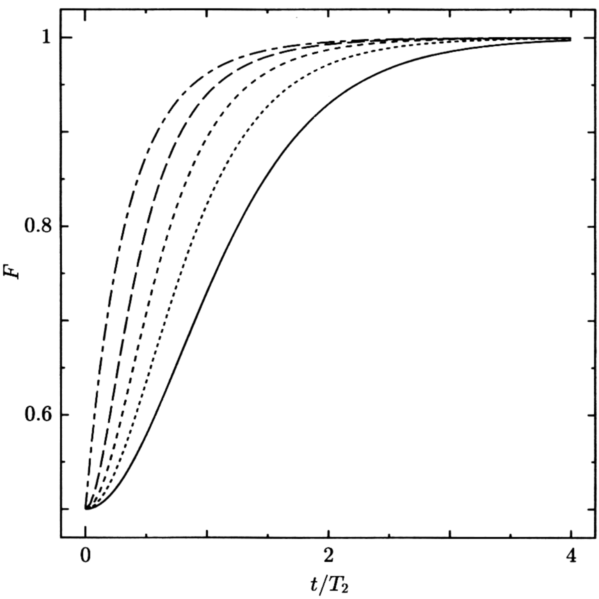


図 **4.2** 忠実度 $F(\rho_1(t), \rho_2(t))$ の時間依存性 [23]．ここで，グラフにおいて——は $\tau_R/T_2 = 2.0$，┈┈┈は $\tau_R/T_2 = 1.0$，- - - - -は $\tau_R/T_2 = 0.5$，– –は $\tau_R/T_2 = 0.2$，— –は $\tau_R/T_2 = 0.0$ である．

$$F(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - |\boldsymbol{a}_1|^2)(1 - |\boldsymbol{a}_2|^2)}. \qquad (4.1.75)$$

ここで，$\boldsymbol{a}_k (k = 1, 2)$ は量子状態 ρ_k を表す Bloch ベクトルである．簡単な例として，外部環境の影響による 2 つの量子ビット状態 $|\psi_1\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$ と $|\psi_2\rangle = |0\rangle$ の識別性の劣化と調べる．$|\sigma_{\text{eq}}| = \frac{1}{2}$ の場合，時刻 t の量子状態 $\rho_1(t) = \mathcal{L}_t|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ と $\rho_2(t) = \mathcal{L}_t|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ の Bloch ベクトルはそれぞれ次の式で与えられる．

を用いれば，$\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2) = (1/2)(1 + \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2)$，および $\det \rho_k = (1/4)(1 - |\boldsymbol{a}_k|^2)$ が成り立つ．これらの関係式から求めるべき式が得られる．

$$\boldsymbol{a}_1(t)=\begin{pmatrix}\gamma_t\\0\\-\frac{1}{2}(1-\gamma_t^2)\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_2(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}(1+\gamma_t^2)\end{pmatrix}. \tag{4.1.76}$$

したがって，時刻 t での量子状態 $\rho_1(t)$ と $\rho_2(t)$ の忠実度は次の式で与えられる．

$$F(\rho_1(t),\rho_2(t))=1-\frac{1}{4}\gamma_t^2(1+\gamma_t^2). \tag{4.1.77}$$

忠実度 $F(\rho_1(t),\rho_2(t))$ の時間依存性をプロットすると図 4.2 のようになる．この図から量子状態の識別性の劣化も外部環境の相関時間 τ_R が長いほど緩やかになることがわかる．量子状態の純粋性の緩和や識別性の劣化に関する考察は，外部環境の相関時間が有限である効果（非 Markov 効果）は注目するシステムの緩和現象を抑える方向にはたらくことを示している．

4.2 確率過程を用いた位相緩和

前節では，外部環境との微視的な相互作用を仮定することによって，量子ビットの不可逆的な時間発展を議論した．そこで，この節では外部環境によって引き起こされる量子ビットのゆらぎを確率過程によって記述する場合の量子ビットの位相緩和過程を考える．このような量子系に対する外部環境の影響を確率過程として扱うモデルは**久保-Anderson**（Kubo・アンダーソン）**模型**とよばれる [25, 26]．位相緩和過程では量子ビットのエネルギーは保存されるので，外部環境の影響下にある量子ビットのハミルトニアン $H(t)$ は次の式で与えられる．

$$H(t)=\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma^z+\frac{1}{2}\hbar\omega(t)\sigma^z. \tag{4.2.78}$$

ここで，$\hbar\omega$ は量子ビットの 2 つの準位のエネルギー差を表し，時間に依存するパラメータ $\omega(t)$ は外部環境との相互作用に起因する振動数の次元をもつ確率変数である．確率変数 $\omega(t)$ は次の性質を満足するものと仮定する．

$$\langle\omega(t)\rangle_\mathrm{R}=0,\qquad \langle\omega(t)\omega(t')\rangle_\mathrm{R}=\Delta^2\mathrm{e}^{-|t-t'|/\tau_\mathrm{R}}. \tag{4.2.79}$$

ここで，$\langle\cdots\rangle_{\mathrm{R}}$ は確率過程に関する平均を表す．確率変数の影響を含んだ量子ビットの状態を $\rho(t,\{\omega(t)\})$ と表せば，その時間発展は次の Liouville 方程式によって決定される．

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\{\omega(t)\}) = -\frac{i}{\hbar}[H(t),\rho(t,\{\omega(t)\})]. \tag{4.2.80}$$

射影演算子を $\mathcal{P}\bullet = \langle\bullet\rangle_R$ と定義して第 3 章で紹介した方法を用いれば，確率過程に関して平均化された量子ビットの状態 $\rho(t) = \langle\rho(t,\{\omega(t)\})\rangle_{\mathrm{R}}$ に対する量子マスター方程式を導くことができる．しかし，位相緩和過程の場合，Heisenberg 描像で量子ビットの時間発展を求める方が簡単なので，この節では Heisenberg 描像を用いることにする．

ハミルトニアン $H(t)$ が (4.2.78) で与えられるとき物理量 A に対する Heisenberg 方程式 $dA(t)/dt = (i/\hbar)[H(t),A(t)]$ から Pauli 行列の運動方程式を求めると，次の式が得られる．

$$\frac{d}{dt}\sigma^{\pm}(t) = \pm i[\omega+\omega(t)]\sigma^{\pm}(t), \tag{4.2.81}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma^{z}(t) = 0. \tag{4.2.82}$$

これらの運動方程式の解を求めると次のようになる．

$$\sigma^{\pm}(t) = \mathrm{e}^{\pm i\omega t}\exp\left[\pm i\int_0^t dt'\,\omega(t')\right]\sigma^{\pm}(0), \tag{4.2.83}$$

$$\sigma^{z}(t) = \sigma^{z}(0). \tag{4.2.84}$$

量子ビットの初期状態と確率過程に関する平均操作を行えば，次の結果が得られる．

$$\langle\sigma^{+}(t)\rangle = \mathrm{e}^{i\omega t}\Phi(t)\langle\sigma^{+}(0)\rangle, \tag{4.2.85}$$

$$\langle\sigma^{-}(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t}\Phi^{*}(t)\langle\sigma^{-}(0)\rangle, \tag{4.2.86}$$

$$\langle\sigma^{z}(t)\rangle = \langle\sigma^{z}(0)\rangle. \tag{4.2.87}$$

ここで，関数 $\Phi(t)$ は確率変数 $\omega(t)$ の特性関数で，次のように表される．

$$\Phi(t) = \left\langle \exp\left[i \int_0^t dt' \, \omega(t') \right] \right\rangle_{\mathrm{R}}. \tag{4.2.88}$$

したがって，位相緩和過程の性質は確率変数 $\omega(t)$ の特性関数によって完全に決定される．確率変数 $\omega(t)$ が定常 Gauss-Markov（ガウス・マルコフ）過程に従う場合には，確率変数 $\omega(t)$ の 3 次以上のキュムラントはゼロになるので，特性関数 $\Phi(t)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \exp\left[i \int_0^t dt_1 \langle \omega(t_1) \rangle_{\mathrm{R}} - \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \omega(t_1)\omega(t_2) \rangle_{\mathrm{R}} \right] \\
&= \exp\left[-(\Delta\tau_{\mathrm{R}})^2 \left(\frac{t}{\tau_{\mathrm{R}}} - 1 + \mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}} \right) \right] \\
&= \exp[-(\Delta\tau_{\mathrm{R}})^2 f(t)].
\end{aligned} \tag{4.2.89}$$

ここで，関数 $f(t)$ は (4.1.58) で与えられる．特性関数 $\Phi(t)$ は次の性質を満足する．

$$\Phi(t) \approx \begin{cases} \mathrm{e}^{-(\Delta t)^2/2} & (t \ll \tau_{\mathrm{R}}), \\ \mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}} & (t \gg \tau_{\mathrm{R}}). \end{cases} \tag{4.2.90}$$

すなわち，関数 $\Phi(t)$ は短時間領域では Gauss 関数的に減衰し，長時間領域では指数関数的に減衰する．一方，確率変数 $\omega(t)$ が対称な定常 2 状態遷移 Markov 過程に従う場合には，特性関数 $\Phi(t)$ は次のようになる．

$$\Phi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t/(2\tau_{\mathrm{R}})} \left[\cosh\left(\dfrac{at}{2\tau_{\mathrm{R}}} \right) + \dfrac{1}{a} \sinh\left(\dfrac{at}{2\tau_{\mathrm{R}}} \right) \right] & \left(\Delta\tau_{\mathrm{R}} < \dfrac{1}{2} \right), \\ \mathrm{e}^{-t/(2\tau_{\mathrm{R}})} \left(1 + \dfrac{t}{2\tau_{\mathrm{R}}} \right) & \left(\Delta\tau_{\mathrm{R}} = \dfrac{1}{2} \right), \\ \mathrm{e}^{-t/(2\tau_{\mathrm{R}})} \left[\cos\left(\dfrac{at}{2\tau_{\mathrm{R}}} \right) + \dfrac{1}{a} \sin\left(\dfrac{at}{2\tau_{\mathrm{R}}} \right) \right] & \left(\Delta\tau_{\mathrm{R}} > \dfrac{1}{2} \right). \end{cases} \tag{4.2.91}$$

ここで，$a = |1 - (2\Delta\tau_{\mathrm{R}})^2|^{1/2}$ である．確率変数 $\omega(t)$ が定常 Gauss-Markov 過程に従う場合や対称な定常 2 状態遷移 Markov 過程に従う場合には特性関数 $\Phi(t)$ は実関数になる．

量子ビットの任意の状態は Pauli 行列の平均値が求まれば完全に決定される．

Pauli 行列の平均値が (4.2.85)-(4.2.87) で与えられる場合，相互作用描像での量子ビット状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ は次の式で与えられる．

$$\rho^{\mathrm{I}}(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi^*(t)a_-(0)\sigma^+ + \Phi(t)a_+(0)\sigma^- + a_z(0)\sigma^z\right]. \tag{4.2.92}$$

ここで，$a_\pm(0) = a_x(0) \pm ia_y(0)$ であり，$\boldsymbol{a}(0) = (a_x(0), a_y(0), a_z(0))^{\mathrm{T}}$ は初期状態の Bloch ベクトルである．また，量子状態の時間発展を記述する量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ は次の式で与えられる．

$$\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0|, \tag{4.2.93}$$

$$\mathcal{L}_t|0\rangle\langle 1| = \Phi^*(t)|0\rangle\langle 1|, \tag{4.2.94}$$

$$\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 0| = \Phi(t)|1\rangle\langle 0|, \tag{4.2.95}$$

$$\mathcal{L}_t|1\rangle\langle 1| = |1\rangle\langle 1|. \tag{4.2.96}$$

これらの関係式を用いれば，位相緩和過程を確率過程によって記述する場合の量子ビットの性質を解析することができる．また，量子ビット状態を表現する Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ の時間発展は次の式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re\mathrm{e}\,\Phi(t) & -\Im\mathrm{m}\,\Phi(t) & 0 \\ \Im\mathrm{m}\,\Phi(t) & \Re\mathrm{e}\,\Phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x(0) \\ a_y(0) \\ a_z(0) \end{pmatrix}. \tag{4.2.97}$$

位相緩和過程における量子ビット状態の純粋度の時間変化を調べよう．量子状態の純粋度は線形エントロピーによって定量化する．量子ビット状態の線形エントロピーは Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ を用いると $S_L = \frac{1}{2}(1 - |\boldsymbol{a}(t)|^2)$ で与えられる．(4.2.97) を用いれば，次のようになる．

$$S_L = \frac{1}{2}\left\{1 - |\Phi(t)|^2[a_x^2(0) + a_y^2(0)] - a_z^2(0)\right\}. \tag{4.2.98}$$

さらに，すべての可能な量子ビットの純粋状態に関して線形エントロピーを平均すれば，次の結果が得られる．

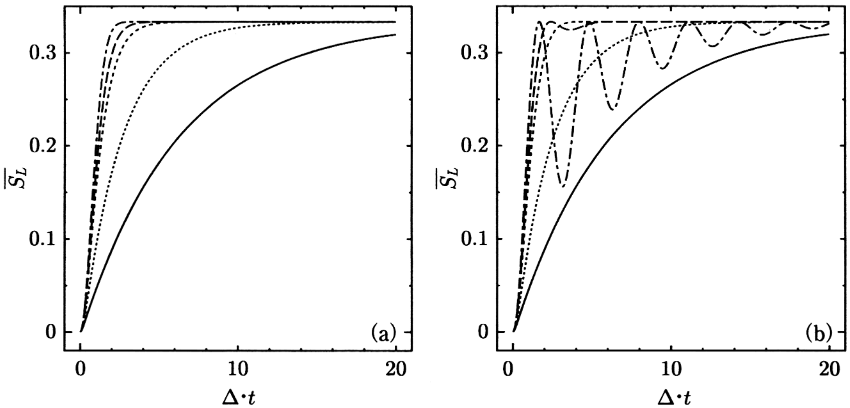


図 **4.3** 平均化された線形エントロピー $\overline{S_L}$ の時間依存性 [27]. (a) は外部環境によるゆらぎが定常 Gauss-Markov 過程に従う場合であり, (b) は定常 2 状態遷移 Markov 過程に従う場合である. ここで, グラフにおいて——は $\Delta\tau_R = 0.08$, ……は $\Delta\tau_R = 0.2$, -----は $\Delta\tau_R = 0.6$, ‒‒は $\Delta\tau_R = 1.0$, ‒·‒は $\Delta\tau_R = 5.0$ である.

$$\overline{S_L} = \frac{1}{3}(1 - |\Phi(t)|^2). \tag{4.2.99}$$

外部環境によるゆらぎが定常 Gauss-Markov 過程に従う場合と対称な定常 2 状態遷移 Markov 過程に従う場合に平均化された線形エントロピー $\overline{S_L}$ を時間 t の関数としてプロットすると図 4.3 のようになる.

4.3 単一モードの光子系の緩和現象

4.3.1 単一モード光子系の時間発展

外部環境の影響を受けて不可逆的な時間発展をする調和振動子は減衰振動子とよばれる. 第 3 章の結果から相互作用描像での減衰振動子の量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ の時間発展は次の量子マスター方程式によって決定される.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\rm I}(t) = \phi_{-+}(t)[a\rho^{\rm I}(t), a^\dagger] + \phi^*_{-+}(t)[a, \rho^{\rm I}(t)a^\dagger] \\ + \phi_{+-}(t)[a^\dagger\rho^{\rm I}(t), a] + \phi^*_{+-}(t)[a^\dagger, \rho^{\rm I}(t)a] \qquad (4.3.100)$$

ここで，a と $a^\dagger$ はボース粒子の消滅演算子と生成演算子である．また，関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は次の式で与えられる．

$$\phi_{-+}(t) = \frac{\lambda^2}{\hbar^2}\int_0^t dt' \, \langle R(t')R^\dagger(0)\rangle_{\rm R} {\rm e}^{i\omega t'}, \qquad (4.3.101)$$

$$\phi_{+-}(t) = \frac{\lambda^2}{\hbar^2}\int_0^t dt' \, \langle R^\dagger(t')R(0)\rangle_{\rm R} {\rm e}^{-i\omega t'} \qquad (4.3.102)$$

ここで，ω は注目している調和振動子の振動数である．外部環境の演算子 $R(t)$ の相関時間が注目する時間スケールに比べて十分に短い場合，右辺の積分の上限は ∞ に置き換えることができ，関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は時間によらない定数となる．このとき，(4.3.100) は **Lindblad**（リンドブラッド）**型の量子マスター方程式**とよばれる．量子マスター方程式 (4.3.100) は解析的に解くことができる．このために，量子状態 $\rho^{\rm I}(t)$ を c-数関数に写像し（付録 A.2 節を参照），演算子の代数方程式である量子マスター方程式 (4.3.100) をそれと等価な Fokker-Planck（フォッカー・プランク）型の微分方程式に書き換える [28, 29, 30]．以下では調和振動子の振動数の補正を与える関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ の虚数部分を省略し，$\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は実関数であると仮定する*10．

Hilbert 空間上で定義される量子状態 ρ を c-数関数を用いて表現するために，次の式で定義される Δ-演算子を導入する．

$$\Delta_s(z) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha) {\rm e}^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2 - \alpha z^* + \alpha^* z}. \qquad (4.3.103)$$

ここで，$d^2\alpha = d(\Re{\rm e}\,\alpha)d(\Im{\rm m}\,\alpha)$ であり，積分領域は複素平面の全領域にわたって行われる．また，$D(\alpha)$ は並進演算子である．

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a). \qquad (4.3.104)$$

*10　本章脚注 6 と同じ．

このように定義された Δ-演算子 $\Delta_s(z)$ は次の性質を満足する.

$$\mathrm{Tr}\,\Delta_s(z) = 1, \tag{4.3.105}$$

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}\Delta_s(z) = 1, \tag{4.3.106}$$

$$\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(z')] = \pi\delta^{(2)}(z-z'). \tag{4.3.107}$$

したがって，Δ-演算子の集合 $\{\Delta_s(z)\,|\,z\in\mathbb{C}\}$ は規格化条件，完全性関係，および直交関係を満足することがわかる．これらの関係は並進演算子 $D(\alpha)$ の直交関係 $\mathrm{Tr}[D(\alpha)D^\dagger(\beta)] = \pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta)$ と Fourier（フーリエ）変換の性質から導くことができる．ここで，$\delta^{(2)}(z) = \delta(\Re\mathrm{e}\,z)\delta(\Im\mathrm{m}\,z)$ である．量子状態 ρ と Δ-演算子 $\Delta_s(z)$ を用いて次のような c-数関数 $F_s(z)$ を定義する.

$$F_s(z) = \mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z)]. \tag{4.3.108}$$

このように定義された c-数関数 $F_s(z)$ を用いれば，Δ-演算子の性質から量子状態 ρ は次の形に表すことができる.

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi} F_s(z)\Delta_s(z). \tag{4.3.109}$$

量子状態 ρ と c-数関数 $F_s(z)$ は一対一に対応するので，関数 $F_s(z)$ は量子状態 ρ の c 数空間での表現と考えることができる．一般に，任意の演算子 A も c-数関数 $A_s(z)$ を用いて次のように表現することができる.

$$A = \int \frac{d^2 z}{\pi} A_s(z)\Delta_s(z), \qquad A_s(z) = \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]. \tag{4.3.110}$$

このとき，演算子 A の量子状態 ρ における平均値は，c-数関数を用いて次のように計算することができる.

$$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(A\rho) = \int \frac{d^2 z}{\pi} A_s(z)F_{-s}(z) = \int \frac{d^2 z}{\pi} A_{-s}(z)F_s(z). \tag{4.3.111}$$

演算子の c-数関数表現に関しては付録 A.2.1 項でくわしく説明する．また，c-数関数 $F_s(z)$ を用いれば，生成演算子 $a^\dagger$ と消滅演算子 a の積の平均値は次の式によ

って計算することができる.

$$\langle\{a^{\dagger\, m} a^n\}_s\rangle = \int \frac{d^2 z}{\pi} z^{*\, m} z^n F_s(z). \tag{4.3.112}$$

ここで, $\{a^{\dagger\, m} a^n\}_s$ は次の式で定義される生成演算子 $a^\dagger$ と消滅演算子 a の s-順序積である.

$$\{a^{\dagger\, m} a^n\}_s = (-1)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial\alpha^m \partial\alpha^{*n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2 + \alpha a^\dagger - \alpha^* a}\bigg|_{\alpha=0}. \tag{4.3.113}$$

特に, $m = n = 1$ の場合には次の式が成り立つ.

$$\langle a^\dagger a\rangle = \int \frac{d^2 z}{\pi} |z|^2 F_{-1}(z), \tag{4.3.114}$$

$$\frac{1}{2}\langle a^\dagger a + a a^\dagger\rangle = \int \frac{d^2 z}{\pi} |z|^2 F_0(z), \tag{4.3.115}$$

$$\langle a a^\dagger\rangle = \int \frac{d^2 z}{\pi} |z|^2 F_1(z). \tag{4.3.116}$$

関数 $F_{-1}(z), F_0(z), F_1(z)$ はそれぞれ量子状態 ρ の **Glauber-Sudarshan**（グラウバー・スダルシャン）の **P** 関数, **Wigner**（ウィグナー）関数, 伏見（Husimi）の **Q** 関数とよばれる [31].

次に, 量子状態 ρ が c-数関数 $F_s(z)$ で表されるとき, 演算子の積 $a\rho$ や ρa などがどのような形で表現できるかを考える. 付録 A.2.1 項の結果から, 量子状態 ρ を表現する c-数関数が $F_s(z)$ で与えられるとき, 量子状態 ρ と生成演算子 $a^\dagger$, 消滅演算子 a の積は次のような c-数関数によって表現される.

$$a^n \rho \Rightarrow \left[z + \frac{1}{s}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\right]^n F_s(z), \tag{4.3.117}$$

$$\rho a^n \Rightarrow \left[z + \frac{1}{s}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\right]^n F_s(z), \tag{4.3.118}$$

$$a^{\dagger\, n} \rho \Rightarrow \left[z^* + \frac{1}{s}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\right]^n F_s(z), \tag{4.3.119}$$

$$\rho a^{\dagger\, n} \Rightarrow \left[z^* + \frac{1}{s}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\right]^n F_s(z), \tag{4.3.120}$$

$$a^\dagger a\rho \Rightarrow \left[|z|^2 + \frac{1}{2}(s-1)z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}(s+1)z^*\frac{\partial}{\partial z^*} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}(s^2-1)\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*} + \frac{1}{2}(s-1)\right] F_s(z), \qquad (4.3.121)$$

$$\rho a^\dagger a \Rightarrow \left[|z|^2 + \frac{1}{2}(s+1)z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}(s-1)z^*\frac{\partial}{\partial z^*} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}(s^2-1)\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*} + \frac{1}{2}(s-1)\right] F_s(z), \qquad (4.3.122)$$

$$a\rho a^\dagger \Rightarrow \left[|z| + \frac{1}{2}(s+1)z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}(s+1)z^*\frac{\partial}{\partial z^*} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}(s+1)^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*} + \frac{1}{2}(s+1)\right] F_s(z), \qquad (4.3.123)$$

$$a^\dagger \rho a \Rightarrow \left[|z| + \frac{1}{2}(s-1)z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}(s-1)z^*\frac{\partial}{\partial z^*} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}(s-1)^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*} + \frac{1}{2}(s-1)\right] F_s(z). \qquad (4.3.124)$$

外部環境の影響下にある調和振動子の時刻 t での量子状態 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ を表現する c-数関数を $F_s(z;t)$ と表せば，量子マスター方程式 (4.3.100) と対応関係 (4.3.117)-(4.3.124) から，c-数関数 $F_s(z;t)$ の時間発展は次のような Fokker-Planck 型の微分方程式によって決定される．

$$\frac{\partial}{\partial t}F_s(z;t) = [\phi_{-+}(t) - \phi_{+-}(t)]\left(\frac{\partial}{\partial z}z + \frac{\partial}{\partial z^*}z^*\right)F_s(z;t)$$
$$+ [(1+s)\phi_{-+}(t) + (1-s)\phi_{+-}(t)]\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}F_s(z;t). \qquad (4.3.125)$$

この微分方程式の一般解は次の式で与えられる*11．

$$F_s(z;t) = \int \frac{d^2z'}{\pi} G_s(z|z';t)F_s(z';0). \qquad (4.3.126)$$

微分方程式 (4.3.125) の Green（グリーン）関数 $G_s(z|z';t)$ は次のような Gauss 分布で与えられる．

*11　一般解の導出は付録 A.2.2 項で与える [32]．

$$G_s(z|z';t) = \frac{1}{D_s(t,0)} \exp\left[-\frac{|z - z'\mathrm{e}^{-\Gamma(t,0)}|^2}{D_s(t,0)}\right]. \tag{4.3.127}$$

ここで，実パラメータ $\Gamma(t,t')$ と $D_s(t,t')$ はそれぞれ次の式で定義される．

$$\Gamma(t,t') = \int_{t'}^{t} d\tau\,[\phi_{-+}(\tau) - \phi_{+-}(\tau)], \tag{4.3.128}$$

$$D_s(t,t') = \int_{t'}^{t} d\tau\,[(1+s)\phi_{-+}(\tau) + (1-s)\phi_{+-}(\tau)]\mathrm{e}^{-2\Gamma(t,\tau)}. \tag{4.3.129}$$

また，パラメータ s の値が異なる $D_s(t,t')$ は次の関係式によって互いに結ばれる．

$$D_s(t,t') = D_{s'}(t,t') + \frac{1}{2}(s-s')[1 - \mathrm{e}^{-2\Gamma(t,t')}]. \tag{4.3.130}$$

グリーン関数 $G_s(z|z';t)$ は次の性質を満足する．

$$\lim_{t\to 0} G_s(z|z';t) = \pi\delta^{(2)}(z - z'), \tag{4.3.131}$$

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} G_s(z|z';t) = 1. \tag{4.3.132}$$

量子マスター方程式 (4.3.100) の解は相互作用描像での量子チャンネル $\mathcal{L}_t$: $\rho^{\mathrm{I}}(0) \to \rho^{\mathrm{I}}(t)$ を与えるが，(4.3.126) と (4.3.127) は量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ の c-数関数空間における表現である．一般に，量子状態を表現する c-数関数が Gauss 分布になる場合，その量子状態は **Gauss 状態**とよばれる．(4.3.126) と (4.3.127) から明らかなように，関数 $F_s(z;0)$ が Gauss 分布ならば関数 $F_s(z;t)$ も Gauss 分布である．このように Gauss 状態を Gauss 状態に写像する量子チャンネルは **Gauss チャンネル**とよばれる．すなわち，量子マスター方程式 (4.3.100) に従う量子状態の時間発展は Gauss チャンネルで表される．

4.3.2 単一モード光子系のディコヒーレンス

相互作用描像での量子マスター方程式 (4.3.100) の解 $\rho^{\mathrm{I}}(t)$ を表現する (4.3.126) と (4.3.127) で与えられる c-数関数を用いると減衰振動子のさまざまな平均値を計算することができる．たとえば，消滅演算子 a と粒子数 $a^\dagger a$ の平均値は次の式で与えられる．

$$\langle a(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t}\sqrt{G_t}\langle a(0)\rangle, \tag{4.3.133}$$

$$\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle = G_t[\langle a^\dagger(0)a(0)\rangle + A_t]. \tag{4.3.134}$$

ここで，パラメータ G_t と A_t は次の式で定義される．

$$G_t = \mathrm{e}^{-2\Gamma(t,0)}, \tag{4.3.135}$$

$$A_t = \mathrm{e}^{2\Gamma(t,0)}D_{-1}(t,0). \tag{4.3.136}$$

パラメータ G_t は量子マスター方程式 (4.3.100) で与えられる量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ の利得を表す．不等式 $G_t > 1$ が成り立つ場合，量子チャンネルは線形増幅過程を表し，不等式 $G_t < 1$ が成り立つ場合，量子チャンネルは線形減衰過程を表す．ここで，線形とは利得自身が調和振動子の状態に依存しないことを意味する．また，パラメータ A_t はこの量子チャンネルの単位利得当たりの雑音粒子数の平均値を表す．正規順序の積 $a^\dagger a$ の平均値ではなく，対象順序での積 $\frac{1}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger)$ の平均値を求めると次のようになる．

$$\left\langle \frac{a^\dagger(t)a(t) + a(t)a^\dagger(t)}{2} \right\rangle = G_t\left[\left\langle \frac{a^\dagger(0)a(0) + a(0)a^\dagger(0)}{2} \right\rangle + \mathcal{A}_t\right]. \tag{4.3.137}$$

ここで，$\mathcal{A}_t = \mathrm{e}^{2\Gamma(t,0)}D_0(t,0)$ であり，パラメータ A_t とは次の関係式によって結ばれる．

$$\mathcal{A}_t = A_t - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{G_t}\right). \tag{4.3.138}$$

Heisenberg の不確定性関係によってパラメータ $\mathcal{A}_t$ は次の不等式を満足する [33].

$$\mathcal{A}_t \geq \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{G_t}\right|. \tag{4.3.139}$$

この不等式は次のようにして導くことができる．Heisenberg 描像を用いると，時刻 t での振動子の消滅演算子 $a(t)$ は初期時刻での消滅演算子 $a(0)$ と次の関係式によって結ばれる．

$$a(t) = \mathrm{e}^{-i\omega t}\sqrt{G_t}\, a(0) + f_t. \tag{4.3.140}$$

ここで，演算子 f_t は外部環境の影響によるゆらぎを表す雑音演算子である．このとき，(4.3.133) から雑音演算子 f_t の平均値はゼロでなければならない．

$$\langle f_t \rangle = 0. \tag{4.3.141}$$

また，同時刻における消滅演算子と生成演算子の間に交換関係 $[a(t), a^\dagger(t)] = 1$，および $[a(0), a^\dagger(0)] = 1$ が成り立つことから，雑音演算子 f_t は次の交換関係を満足しなければならない．

$$[f_t, f_t^\dagger] = 1 - G_t. \tag{4.3.142}$$

ここで，雑音演算子 f_t を用いてエルミート演算子 X_t と Y_t を次の式で定義する．

$$X_t = \frac{f_t + f_t^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad Y_t = -i\frac{f_t - f_t^\dagger}{\sqrt{2}}. \tag{4.3.143}$$

これらの演算子は交換関係 $[X_t, Y_t] = i(1 - G_t)$ を満足する．したがって，エルミート演算子 X_t と Y_t に対しては次の不確定性関係が成り立つ．

$$\Delta X_t \Delta Y_t \geq \frac{1}{2}|1 - G_t|. \tag{4.3.144}$$

また，「相加平均」≧「相乗平均」が成り立つことを用いれば，次の不等式が導かれる．

$$(\Delta X_t)^2 + (\Delta Y_t)^2 \geq |1 - G_t|. \tag{4.3.145}$$

ここで，$\langle f_t \rangle = 0$ が成り立つことを用いれば，雑音演算子 f_t と $f_t^\dagger$ の対称化積の平均値は次のように評価することができる．

$$\left\langle \frac{f_t f_t^\dagger + f_t^\dagger f_t}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\left[(\Delta X_t)^2 + (\Delta Y_t)^2\right]$$
$$\geq \frac{1}{2}|1 - G_t|. \tag{4.3.146}$$

また，時刻 t での消滅演算子 $a(t)$ と生成演算子 $a^\dagger(t)$ の対称化積の平均値を計算すると次のようになる．

$$\left\langle \frac{a^\dagger(t)a(t) + a(t)a^\dagger(t)}{2} \right\rangle = G_t \left\langle \frac{a^\dagger(0)a(0) + a(0)a^\dagger(0)}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{f_t^\dagger f_t + f_t f_t^\dagger}{2} \right\rangle$$
$$= G_t \left[\left\langle \frac{a^\dagger(0)a(0) + a(0)a^\dagger(0)}{2} \right\rangle + \mathcal{A}_t\right]. \tag{4.3.147}$$

このとき，パラメータ $\mathcal{A}_t$ は次の不等式を満足する．

$$\mathcal{A}_t = \frac{1}{G_t}\left\langle \frac{f_t^\dagger f_t + f_t f_t^\dagger}{2} \right\rangle$$
$$\geq \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{G_t}\right|. \tag{4.3.148}$$

したがって，不等式 (4.3.139) が成り立つ．また，不等式 (4.3.139) からパラメータ A_t は次の不等式を満足する [34]．

$$A_t \geq \begin{cases} 0 & (G_t < 1), \\ 1 - G_t^{-1} & (G_t > 1). \end{cases} \tag{4.3.149}$$

これらの関係式は量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ における単位利得当たりの平均雑音粒子数の下限を与える．

初期状態 $\rho(0)$ が Gauss 状態で与えられる場合を考えよう．単一モードの調和振動子の任意の Gauss 状態を表現する c-数関数 $F_s(z;0)$ は，次のような Gauss 分布で与えられる．

$$F_s(z;0) = \sqrt{\det \mathsf{W}_s}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha})^\dagger \mathsf{W}_s(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha})\right]. \tag{4.3.150}$$

ここで，2 次元複素ベクトル $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{\alpha}$，2×2 エルミート行列 W_s は次の式で定義さ

れる.

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \langle a(0) \rangle \\ \langle a^\dagger(0) \rangle \end{pmatrix}, \tag{4.3.151}$$

$$\mathsf{W}_s = \frac{1}{[\bar{n}(0) + \frac{1+s}{2}]^2 - |\bar{m}(0)|^2} \begin{pmatrix} \bar{n}(0) + \frac{1+s}{2} & \bar{m}(0) \\ \bar{m}^*(0) & \bar{n}(0) + \frac{1+s}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.3.152}$$

また，パラメータ $\bar{n}(0)$ と $\bar{m}(0)$ は次の式で与えられる.

$$\bar{n}(0) = \langle a^\dagger(0) a(0) \rangle, \qquad \bar{m}(0) = -\langle a^2(0) \rangle. \tag{4.3.153}$$

Heisenberg の不確定性関係からパラメータ $\bar{n}(0)$ と $\bar{m}(0)$ は次の不等式を満足する.

$$\bar{n}(0)[\bar{n}(0) + 1] \geq |\bar{m}(0)|^2. \tag{4.3.154}$$

ところで，パラメータ s の値が $s = -1$ の場合には，c-数関数 $F_{-1}(z; 0)$ は Glauber-Sudarshan の P 関数になるが，この関数が正の解析関数，あるいは δ-関数になるための必要十分条件は $\det \mathsf{W}_s \geq 0$ で与えられる．Glauber-Sudarshan の P 関数が正の解析関数，あるいは δ-関数で与えられるような量子状態は**古典的**とよばれる[*12]．したがって，Gauss 状態 $\rho(0)$ が古典的であるための条件は次の式で与えられる.

$$\bar{n}(0) \geq |\bar{m}(0)|. \tag{4.3.155}$$

量子マスター方程式 (4.3.100) に従う時間発展は (4.3.126) と (4.3.127) で与えられるので，初期状態の Gauss 分布の形は保存され，時刻 t での量子状態 $\rho(t)$ を表す c-数関数 $F_s(z; t)$ は次のような Gauss 分布で与えられる.

---

*12 古典的な量子状態 $\rho(0)$ は，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の確率 $F_{-1}(z; 0)$ での統計的混合として表すことができる.

$$\rho(0) = \int \frac{d^2 z}{\pi} F_{-1}(z; 0) |z\rangle\langle z|, \qquad F_{-1}(z; 0) \geq 0.$$

$$F_s(z;t) = \sqrt{\det \mathsf{W}_s(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}(t)]^\dagger \mathsf{W}_s(t)[\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}(t)]\right\}. \quad (4.3.156)$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{\alpha}(t)$ と行列 $\mathsf{W}_s(t)$ は次の式で定義される．

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\omega t}\sqrt{G_t}\langle a(0)\rangle \\ \mathrm{e}^{i\omega t}\sqrt{G_t}\langle a^\dagger(0)\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.3.157)$$

$$\mathsf{W}_s(t) = \frac{1}{[\bar{n}(t) + \frac{1+s}{2}]^2 - |\bar{m}(t)|^2} \begin{pmatrix} \bar{n}(t) + \frac{1+s}{2} & \bar{m}(t) \\ \bar{m}^*(t) & \bar{n}(t) + \frac{1+s}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.3.158)$$

パラメータ $\bar{n}(t)$ と $\bar{m}(t)$ は次の式で与えられる．

$$\bar{n}(t) = G_t[\bar{n}(0) + A_t], \quad (4.3.159)$$

$$\bar{m}(t) = \mathrm{e}^{-2i\omega t} G_t \bar{m}(0). \quad (4.3.160)$$

不等式 (4.3.149) と (4.3.154) から不等式 $\bar{n}(t)[\bar{n}(t)+1] \geq |\bar{m}(t)|^2$ が成り立つことが確かめられる．また，時刻 t での Gauss 状態 $\rho(t)$ が古典的であるための条件 $\bar{n}(t) \geq |\bar{m}(t)|$ は次のようになる．

$$A_t \geq |\bar{m}(0)| - \bar{n}(0). \quad (4.3.161)$$

Heisenberg の不確定性関係から $|\bar{m}(0)| - \bar{n}(0)$ の最大値は $\frac{1}{2}$ を超えることがないので，パラメータ A_t の値が $\frac{1}{2}$ 以上になるとき，時刻 t での Gauss 状態は古典的になる*13．すなわち，次の不等式が成り立つとき，任意の Gauss 状態 $\rho(0)$ の非古典性は外部環境によって完全に破壊される．

$$A_t \geq \frac{1}{2}. \quad (4.3.162)$$

外部環境が熱平衡状態にある調和振動子の集団から構成される場合，関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は (A.1.10) と (A.1.11) で与えられるので，パラメータ $\langle a(t)\rangle$, $\bar{n}(t)$, および $\bar{m}(t)$ はそれぞれ次の式で与えられる．

---

*13 一般に，Gauss 状態とは限らない任意の量子状態が量子マスター方程式 (4.3.100) に従って時間発展するとき，時刻 t の量子状態が古典的であるための十分条件は $A_t \geq 1$ で与えられる．Gauss 状態の場合，初期時刻での非古典性の強さが制限されるために条件が緩められる．

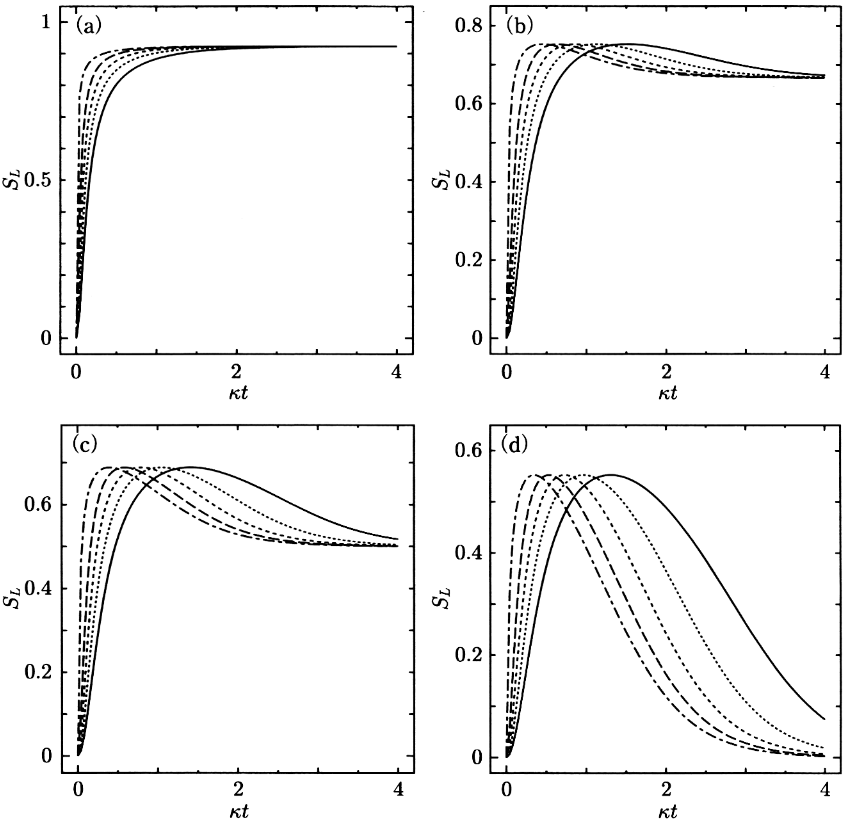


図 4.4 Gauss 状態の線形エントロピー S_L の時間依存性 [32]. ここで, (a) $\bar{n}=6.0$, (b) $\bar{n}=1.0$, (c) $\bar{n}=0.5$, および (d) $\bar{n}=0.0$ である. また, 各グラフにおいて——は $\kappa\tau_{\mathrm{R}}=2.0$, ……は $\kappa\tau_{\mathrm{R}}=1.0$, -----は $\kappa\tau_{\mathrm{R}}=0.5$, ——は $\kappa\tau_{\mathrm{R}}=0.2$, -·-·は $\kappa\tau_{\mathrm{R}}=0.0$ である. なお, $\bar{n}(0)=4.0$ と設定した.

$$\langle a(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t}\gamma_t\langle a(0)\rangle, \tag{4.3.163}$$

$$\bar{n}(t) = \bar{n}+[\bar{n}(0)-\bar{n}]\gamma_t^2, \tag{4.3.164}$$

$$\bar{m}(t) = \mathrm{e}^{-2i\omega t}\gamma_t^2\bar{m}(0). \tag{4.3.165}$$

ここで, $\gamma_t=\mathrm{e}^{-\kappa\tau_{\mathrm{R}}f(t)}$, および $f(t)=t/\tau_{\mathrm{R}}-1+\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}}$ である. 時刻 t での Gauss 状態の純粋性を線形エントロピー $S_L=1-\mathrm{Tr}\,\rho^2(t)$ を用いて調べる. 量子

状態 $\rho(t)$ を表現する c-数関数を $F_s(z;t)$ とするとき，線形エントロピー S_L は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned} S_L &= 1 - \int \frac{d^2 z}{\pi} F_0^2(z;t) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{[2\bar{n}(t)+1]^2 - 4|\bar{m}(t)|^2}}. \end{aligned} \tag{4.3.166}$$

初期状態が純粋な Gauss 状態には $\bar{n}(0)(\bar{n}(0)+1) = |\bar{m}(0)|^2$ が成り立ち，線形エントロピー S_L を時間の関数としてプロットすると図 4.4 のようになる．量子ビットの場合と同様に，外部環境の相関時間 τ_{R} が長いほど Gauss 状態の純粋性の減少が緩やかになることがわかる．

第5章

エンタングルメントの緩和

量子状態のエンタングルメントは複数のシステムの間に存在する量子力学に特有の相関である [35]．Hilbert 空間 $\mathcal{H}^A$ と $\mathcal{H}^B$ のテンソル積 $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ で記述される２つのシステム A と B の量子状態 ρ^{AB} を考えてみよう．このとき，量子状態 ρ^{AB} に対して等号 $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$ を満足するような各 Hilbert 空間上で定義される量子状態 ρ^A と ρ^B が存在すれば，２つのシステムは完全に独立であり，システムの間にはいかなる相関も存在しない．また，２つのシステムの量子状態が $\rho^{AB} = \sum_k \pi_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$ の形に表されるとき，量子状態 ρ^{AB} は可分（separable）とよばれる．ここで，パラメータ π_k は条件 $\pi_k \geq 0$ と $\sum_k \pi_k = 1$ を満足する．可分な量子状態で記述される２つのシステムの間には古典相関は存在するが，量子力学的な相関は存在しない．２つのシステムの間の古典相関は，各システムに対する局所的な量子操作と２つのシステムの間の古典通信によって生成することができる．

一方，２つのシステムの量子状態が可分でないとき，すなわち量子状態が $\rho^{AB} = \sum_k \pi_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$ の形に表すことができないとき，２つのシステムの間には量子相関，あるいはエンタングルメントが存在する．２つのシステムが純粋状態にある場合には，これらのシステムの間にエンタングルメントが存在するか否かは簡単に調べることができ，エンタングルメントの定量化も確立されている．しかし，混合状態のエンタングルメントの定量化に関しては未解決の問題が残されている．エンタングルメントは量子力学の最も基本的で重要な性質であると同時に，量子テレポーテーションや量子デンスコーディングのような量子通信や量子コンピュータがさまざまなアルゴリズムを実行するうえで本質的な役割を果たすリソースでもある [36]．

本章では，エンタングルメントに関する基本的な事項のまとめを行った後，前章で求めた量子系に対する緩和現象を記述する方法を用いて，量子ビットと調和振動子のエンタングルメントが外部環境の影響によってどのように破壊されていくか，

すなわちエンタングルメントのディコヒーレンスを議論する.

5.1 量子状態のエンタングルメントとその定量化

Hilbert 空間 $\mathcal{H}^A$ と $\mathcal{H}^B$ で記述される 2 つのシステムから成る合成系が純粋状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ にある場合を考える. このとき, 等号 $|\Psi^{AB}\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle (|\psi^A\rangle \in \mathcal{H}^A,\ |\psi^B\rangle \in \mathcal{H}^B)$ が成り立てば, 2 つのシステムは完全に独立である. 一方, 量子状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ が $|\Psi^{AB}\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle$ の形に表すことができないとき, 2 つのシステムの間にはエンタングルメントが存在する. 2 つのシステムの間に存在するエンタングルメントの大きさはエンタングルメント・エントロピー (entropy of entanglement) とよばれるパラメータによって定量化することができる [37]. 量子状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ のエンタングルメント・エントロピー $E(|\Psi^{AB}\rangle)$ は, 量子状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ から一方のシステムに関する情報を消去して得られる密度行列 $\rho^A = \mathrm{Tr}_B |\Psi^{AB}\rangle\langle\Psi^{AB}|$, または $\rho^B = \mathrm{Tr}_A |\Psi^{AB}\rangle\langle\Psi^{AB}|$ の **von Neumann** (フォン・ノイマン) エントロピーとして次のように定義される.

$$E(|\Psi^{AB}\rangle) = S(\rho^A) = S(\rho^B). \tag{5.1.1}$$

ここで, $S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ である. 対数の底を 2 に選んだ場合のエンタングルメントの大きさの単位は "ebit" (entanglement bit) とよばれる. 2 つのシステムの全体は純粋状態にあるので, (5.1.1) の 2 番目の等号が成り立つ*1. たとえば, Bell 状態 $|\Phi_\pm\rangle, |\Psi_\pm\rangle$ のエンタングルメントの大きさは 1 ebit である. ここで, Bell 状態は次の式で与えられる.

$$|\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle),$$
$$|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

---

*1 一般に, 2 つのシステムの全体が任意の量子状態 ρ^{AB} にあり, 個別のシステムの量子状態を $\rho^A = \mathrm{Tr}_B \rho^{AB}$, および $\rho^B = \mathrm{Tr}_A \rho^{AB}$ とするとき, 次の Lieb-荒木 (リーブ・Araki) の不等式が成り立つ.

$$|S(\rho^A) - S(\rho^B)| \le S(\rho^{AB}) \le S(\rho^A) + S(\rho^B).$$

量子状態 ρ^{AB} が純粋状態の場合, von Neumann エントロピー $S(\rho^{AB})$ はゼロになるので, 等号 $S(\rho^A) = S(\rho^B)$ が成り立つ.

エンタングルメント・エントロピー $E(|\Psi^{AB}\rangle)$ は機能的な意味をもっている．2つのシステム A と B が空間的に隔てておかれている場合を考えよう．システム A，またはシステム B に対してのみ行う量子状態の変換や量子測定などは総称して**局所的量子操作**（local quantum operation）とよばれる．システム A に対して局所的量子操作を行う者とシステム B に対して局所的量子操作を行う者が古典通信によってお互いの情報をやり取りしながらそれぞれの操作を行う場合は，そのような操作は**LOCC**（local operation and classical communication）**量子操作**とよばれる [38]．2つのシステム A と B が空間的に十分に離れているとき，我々がこれらのシステムに対して行えるのは LOCC 量子操作のみであると考えるのは合理的である．どのような LOCC 量子操作を行っても2つのシステムの間のエンタングルメントは平均として増えることはない．

空間的に隔たった場所にいる A と B が n 個の同一の2量子ビット状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ を共有している場合を考える．すなわち，A と B のそれぞれは n 個の量子ビットを保持しており，A (B) が保持している量子ビットの1つ1つは対応する B (A) の量子ビットと対になっており，各対が量子状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ にある．このとき，システム全体の量子状態は $(|\Psi^{AB}\rangle)^{\otimes n}$ で与えられる*2．A と B は Bell 状態 $|\Phi_+\rangle$ を共有するために，自分たちが保持している量子ビットに対して LOCC 量子操作を行った結果，A と B は m 個の Bell 状態を共有することに成功したとしよう．LOCC 量子操作を行った後のシステム全体の量子状態は $(|\Phi_+\rangle)^{\otimes m}$ で与えられる．この場合，LOCC 量子操作によるシステム全体の量子状態の変化は次の式で与えられる．

$$(|\Psi^{AB}\rangle)^{\otimes n} \xrightarrow{\text{LOCC}} (|\Phi_+\rangle)^{\otimes m} \tag{5.1.2}$$

すなわち，LOCC 量子操作で A と B は不完全なエンタングルメント ($E(|\Psi^{AB}\rangle) < 1$) をもつ n 個の2量子ビット状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ から完全なエンタングルメントをもった m 個の Bell 状態 ($E(|\Phi_+\rangle) = 1$) を生成できたことになる．LOCC 量子操作によって，不完全なエンタングルメントをもつ状態から完全なエンタングルメントをもつ状態を生成することをディスティレーション（distillation）という．不完全なエンタングルメントをもつ2量子ビット状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ の個数 n と，LOCC 量子操作によって生成可能な Bell 状態の個数の上限 m は，次の関係式を満足する．

---

*2　$A^{\otimes n}$ は $\overbrace{A\otimes A\otimes\cdots\otimes A}^{n\text{ 個}}$ を表す．

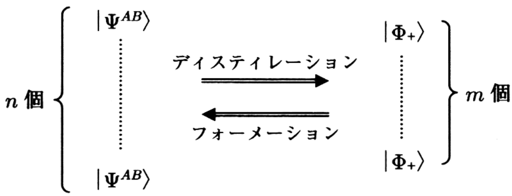


図 5.1　純粋状態のディスティレーションとフォーメーション．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=E(|\Psi^{AB}\rangle). \tag{5.1.3}$$

すなわち，n 個の 2 量子ビット状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ から LOCC 量子操作によって生成できる Bell 状態の数の最大値 m は漸近的に $nE(|\Psi^{AB}\rangle)$ で与えられる．したがって，エンタングルメント・エントロピーがゼロの状態からは，いかなる LOCC 量子操作を行ったとしても Bell 状態を生成することは不可能である．一方，ディスティレーションとは反対の操作を考えることもできる．すなわち，完全なエンタングルメントをもつ Bell 状態から LOCC 量子操作によって任意の量子ビット状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ を生成する操作である．このような操作はフォーメーション（formation）とよばれる．純粋状態のディスティレーションとフォーメーションの様子を示すと図 5.1 のようになる．n 個の量子状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ を LOCC によって生成するのに必要な Bell 状態の数 m は漸近的に $nE(|\Psi^{AB}\rangle)$ で与えられる．純粋状態の場合，エンタングルメントのディスティレーション $(|\Psi^{AB}\rangle)^{\otimes n}\to(|\Phi_+\rangle)^{\otimes m}$ もフォーメーション $(|\Phi_+\rangle)^{\otimes m}\to(|\Psi^{AB}\rangle)^{\otimes n}$ も量子状態 $|\Psi^{AB}\rangle$ のエンタングルメント・エントロピー $E(|\Psi^{AB}\rangle)$ によって定量化することができる．

純粋状態の場合にはエンタングルメントの定量化とその機能的な意味が明らかにされているが，混合状態の場合には特別な場合を除いてエンタングルメントの定量化は非常に困難な問題である．与えられた混合状態にエンタングルメントが存在するか否かを判定することさえ非常に難しい．現在のところエンタングルメントの定量化が行えるのは，2 量子ビット状態や 2 モードの Gauss 状態など簡単なシステムに限られている．一般に，2 つのシステムの量子状態 ρ^{AB} が次の形に表すことができるとき，この量子状態は可分であり，エンタングルメントは存在しない．

$$\rho^{AB}=\sum_k \pi_k\rho_k^A\otimes\rho_k^B \qquad \left(\pi_k\ge 0,\ \sum_k\pi_k=1\right). \tag{5.1.4}$$

ここで，ρ_k^A と ρ_k^B はそれぞれのシステムの Hilbert 空間上で定義される密度行列である．与えられた量子状態がこのような形に表すことができるか否かを判断することは非常に困難である．仮に与えられた量子状態 ρ^{AB} が (5.1.4) の形に表されたとする．このとき，量子状態 ρ^{AB} のシステム A に関して転置をとってみる．

$$(\rho^{AB})^{\mathrm{T}_A} = \sum_k \pi_k (\rho_k^A)^{\mathrm{T}_A} \otimes \rho_k^B. \tag{5.1.5}$$

このように一方のシステムに関してのみ転置をとる操作は**部分転置**（partial transposition）とよばれる．ところで，$(\rho_k^A)^{\mathrm{T}_A}$ は密度行列 ρ_k^A の転置行列なので，$(\rho_k^A)^{\mathrm{T}_A}$ 自体も密度行列になる．したがって，量子状態 ρ^{AB} が (5.1.4) で与えられるとき，部分転置をとったものも密度行列になる．言い換えると，量子状態が可分ならば，部分転置をとって得られる密度行列も何らかの量子状態を表す．量子状態 ρ^{AB} の部分転置を $(\rho^{AB})^{\mathrm{PT}}$ と表せば，次の結果が得られる．

$$\text{「量子状態 } \rho^{AB} \text{ が可分である」} \Longrightarrow (\rho^{AB})^{\mathrm{PT}} > 0. \tag{5.1.6}$$

2 つのシステムを記述する Hilbert 空間が 2×2 次元と 2×3 次元の場合，および 2 モードの Gauss 状態の場合には，不等式 $(\rho^{AB})^{\mathrm{PT}} > 0$ が量子状態が可分であるための必要十分条件であることが証明されている．しかし，一般には不等式 $(\rho^{AB})^{\mathrm{PT}} > 0$ が量子状態が可分であるための必要十分条件ではない*3.

2 つの部分系から構成されるシステムが混合状態 ρ^{AB} にある場合を考える．一般に，混合状態は純粋状態の統計的混合（凸結合）として次のように表すことができる．

$$\rho^{AB} = \sum_k p_k |\Psi_k^{AB}\rangle\langle\Psi_k^{AB}| \qquad \left(p_k \geq 0,\ \sum_k p_k = 1\right). \tag{5.1.7}$$

このような混合状態の純粋状態への分解は一意的には決まらない．そこで，同じ量

*3 エンタングルメントをもった量子状態の全体から成る集合を $\mathcal{S}_{\mathrm{ent}}$，不等式 $(\rho^{AB})^{\mathrm{PT}} > 0$ を満足する量子状態の全体から成る集合を $\mathcal{S}_{\mathrm{PPT}}$ と表すとき，共通集合 $\mathcal{S}_{\mathrm{ent}} \cap \mathcal{S}_{\mathrm{PPT}}$ に属する量子状態は "bound entanglement" をもつ．その場合には $(\rho^{AB})^{\mathrm{PT}} > 0$ であってもエンタングルメントをもつ．2 量子ビット状態や 2 モード Gauss 状態の場合には $\mathcal{S}_{\mathrm{ent}} \cap \mathcal{S}_{\mathrm{PPT}} = \emptyset$ が成り立つ．

子状態 ρ^{AB} を与える非負パラメータと純粋状態の組 $\{p_k, |\Psi_k^{AB}\rangle\}$ の全体から成る集合を $\mathcal{S}(\rho^{AB})$ と表すことにする．量子状態 ρ^{AB} を構成する純粋状態 $|\Psi_k^{AB}\rangle$ の大きさはエンタングルメント・エントロピー $E(|\Psi_k^{AB}\rangle)$ によって定量化することができるので，量子状態 ρ^{AB} のエンタングルメントの大きさ $E_F(\rho^{AB})$ は次の式によって与えられる．

$$E_F(\rho^{AB}) = \min_{\{p_k, |\Psi_k^{AB}\rangle\} \in \mathcal{S}(\rho^{AB})} \sum_k p_k E(|\Psi_k^{AB}\rangle) \tag{5.1.8}$$

このように定義されたパラメータは “entanglement of formation”（量子状態を形成するのに必要なエンタングルメントの大きさ）とよばれ，次のような機能的な意味をもっている [38]．空間的に隔たった 2 地点にいる A と B が LOCC 量子操作によって n 個の 2 量子ビット状態 ρ^{AB} を共有するために必要な Bell 状態の数 m が漸近的に $nE_F(\rho^{AB})$ で与えられる．すなわち，パラメータ $E_F(\rho^{AB})$ は量子状態 ρ^{AB} のフォーメーションに必要なエンタングルメントの大きさである．一方，n 個の 2 量子ビット状態 ρ^{AB} からディスティレーションによって生成することができる Bell 状態の数 m の漸近的な値を $nE_D(\rho^{AB})$ と表すとき，不等式 $E_D(\rho^{AB}) \leq E_F(\rho^{AB})$ が成り立つ．純粋状態の場合には等号が成り立ち，エンタングルメント・エントロピーに等しくなる．混合状態の場合には，フォーメーションに関したエンタングルメントの大きさとディスティレーションに関連したエンタングルメントの大きさが異なる．ディスティレーションに関連したエンタングルメントの大きさ $E_D(\rho^{AB})$ を与える解析的な表現は現在のところ導かれていない．

エンタングルメントの大きさ $E_F(\rho^{AB})$ を求めるためには，(5.1.8) の右辺の量子状態 ρ^{AB} の純粋状態への分解方法に関する最小化を行わなければならない．これを行うことは一般には非常に困難である．エンタングルメントの大きさ $E_F(\rho^{AB})$ の具体的な表現を求めることができるのは 2 量子ビット状態や 2 モード Gauss 状態といった特別な場合だけである．たとえば，2 量子ビット状態 ρ のエンタングルメントの大きさ $E_F(\rho)$ は次の式で与えられる [39]．

$$E_F(\rho) = H\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2(\rho)}}{2}\right). \tag{5.1.9}$$

ここで，$H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ であり，パラメータ $C(\rho)$ は量子状態 ρ のコンカレンス（concurrence）とよばれる．2 量子ビット状態 ρ のコンカ

レンス $C(\rho)$ は次のようにして求めることができる．まず，量子状態 ρ から次の式で定義される行列 R を求める．

$$R = [\sqrt{\rho}(\sigma^y \otimes \sigma^y)\rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y)\sqrt{\rho}]^{1/2}. \tag{5.1.10}$$

次に，行列 R の 4 つの固有値*4を計算し，大きいものから順に $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ とする．このとき，量子ビット状態 ρ のコンカレンス $C(\rho)$ は次の式で与えられる．

$$C(\rho) = \max[\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0]. \tag{5.1.11}$$

エンタングルメントの大きさ $E_F(\rho)$ はコンカレンス $C(\rho)$ の単調増加関数なので，コンカレンス自体を量子状態 ρ のエンタングルメントの大きさと見なすこともできる．

5.2 量子ビットのエンタングルメントのディコヒーレンス

量子ビットのエンタングルメントのディコヒーレンス，すなわちエンタングルメントが外部環境によってどのように減衰していくかを調べてみよう．外部環境の影響下でのシステムの時間発展を記述する量子チャンネルを $\mathcal{L}_t$，恒等写像を $\mathcal{I}$ とするとき，2 つの部分系から成るシステムから構成される任意の量子状態 ρ に対して，$(\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})\rho$ がエンタングルメントをもたない可分な量子状態になるとき，量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ は**エンタングルメント破壊チャンネル**（entanglement-breaking-channel）とよばれる [40]．言い換えると，注目するシステムに対する外部環境の影響がエンタングルメント破壊チャンネルで記述されるとき，そのシステムはエンタングルメントをもち得ない．一般に，量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ がエンタングルメント破壊チャンネルになるための必要十分条件は次のいずれかが成り立つことである．

1. 完全なエンタングルメントをもつ量子状態 $|\Psi\rangle$ に対して，$(\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Psi\rangle\langle\Psi|$ が可分になり，エンタングルメントをもたない．量子ビットの場合には，量子状態 $|\Psi\rangle$ として，4 つの Bell 状態 $|\Phi_+\rangle, |\Phi_-\rangle, |\Psi_+\rangle, |\Psi_-\rangle$ のうちの 1 つを考えれば十分である．

---

*4 行列 R の固有値が行列 $\rho(\sigma^y \otimes \sigma^y)\rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y)$ の固有値の平方根に等しい．

2. 単一システムの任意の量子状態 ρ に対して，条件 $\mathcal{L}_t\rho = \sum_k \rho_k \mathrm{Tr}(M_k\rho)$, および $\sum_k M_k = 1$ を満足する量子状態 ρ_k と非負演算子 M_k が存在する．この条件は量子状態 $\mathcal{L}_t\rho$ が確率 $\mathrm{Tr}(M_k\rho)$ での量子状態 ρ_k の統計的混合で表されることを意味する．

この節では，2 個の量子ビットの一方が外部環境の影響を受ける場合のエンタングルメントのディコヒーレンスを，前章で得られた結果を用いて調べる．

5.2.1 Bloch チャンネルによるエンタングルメントの緩和

外部環境の量子ビットへの影響が (4.1.52)-(4.1.55) で与えられる Bloch チャンネル $\mathcal{L}_t$ によって記述される場合を考える [41]．初期時刻 $(t=0)$ に Bell 状態 $|\Phi_+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ にあった 2 つの量子ビットの 1 つが Bloch チャンネル $\mathcal{L}_t$ によって時間発展する場合，時刻 t での 2 つの量子ビットの量子状態 $\rho(t)$ は次の式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= (\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \\
&= \frac{1}{4}(1+2\mathrm{e}^{-t/T_2}+\mathrm{e}^{-t/T_1})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-2\mathrm{e}^{-t/T_2}+\mathrm{e}^{-t/T_1})|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})w(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})w(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|).
\end{aligned} \tag{5.2.12}
$$

ここでは，$w = \sigma_{\mathrm{eq}}$ とおいた．量子状態 $\rho(t)$ のコンカレンス C_t を求めるために行列 $\rho'(t) = (\sigma^y \otimes \sigma^y)\rho^*(t)(\sigma^y \otimes \sigma^y)$ を計算すると，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &= \frac{1}{4}(1+2\mathrm{e}^{-t/T_2}+\mathrm{e}^{-t/T_1})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-2\mathrm{e}^{-t/T_2}+\mathrm{e}^{-t/T_1})|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|) \\
&\quad - \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})w(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|) \\
&\quad - \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})w(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|).
\end{aligned} \tag{5.2.13}
$$

量子状態 $\rho(t)$ のコンカレンス C_t は行列 $\rho(t)\rho'(t)$ の固有値の平方根 λ_k $(k=1,2,3,4)$ を用いて，$C_t=\max[0,2\max_{1\le k\le 4}\lambda_k-\sum_{k=1}^4\lambda_k]$ で与えられる．実際に，4 つの固有値 λ_k を求めると次のようになる．

$$\lambda_1=\frac{1}{4}\left[\sqrt{(1+\mathrm{e}^{-t/T_1})^2-w^2(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})^2}+2\mathrm{e}^{-t/T_2}\right], \tag{5.2.14}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{4}\left[\sqrt{(1+\mathrm{e}^{-t/T_1})^2-w^2(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})^2}-2\mathrm{e}^{-t/T_2}\right], \tag{5.2.15}$$

$$\lambda_3=\frac{1}{4}\sqrt{1-w^2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1}), \tag{5.2.16}$$

$$\lambda_4=\frac{1}{4}\sqrt{1-w^2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1}). \tag{5.2.17}$$

したがって，量子状態 $\rho(t)$ のコンカレンス C_t は次の式で与えられる．

$$C_t=\max\left[0,\mathrm{e}^{-t/T_2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-w^2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})\right]. \tag{5.2.18}$$

量子状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントの大きさ E_t は，コンカレンス C_t を用いて次の式で与えられる．

$$E_t=H\left(\frac{1+\sqrt{1-C_t^2}}{2}\right). \tag{5.2.19}$$

したがって，量子状態 $\rho(t)$ にエンタングルメントが存在しないための必要十分条件は次の不等式が成り立つことである．

$$\sqrt{1-w^2}(1-\mathrm{e}^{-t/T_1})\ge 2\mathrm{e}^{-t/T_2}. \tag{5.2.20}$$

すなわち，この不等式が成り立つとき，Bloch チャンネルはエンタングルメント破壊チャンネルになる．

Bloch チャンネルによって時間発展した量子状態 $\rho(t)=(\mathcal{L}_t\otimes\mathcal{I})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|$ がエンタングルメントをもたないための必要十分条件 (5.2.20) から次のことがわかる．

1. 等号 $w^2=1$ が成り立つ場合，有限の時間領域では量子状態 $\rho(t)$ には常に

エンタングルメントが存在する．このとき，量子状態 $\rho(t)$ のコンカレンス C_t は次の式で与えられる．

$$C_t = \mathrm{e}^{-t/T_2}. \tag{5.2.21}$$

すなわち，量子状態 $\rho(t)$ のコンカレンス C_t の緩和時間は量子ビットの横緩和時間 T_2 に等しい．

2. 縦緩和時間 T_1 が十分に長く，$T_1 \gg t$ が成り立つような時間領域では，量子状態 $\rho(t)$ にエンタングルメントは常に存在する．このとき，量子状態 $\rho(t)$ のコンカレンス C_t は近似的に次の式で与えられる．

$$C_t \approx \mathrm{e}^{-t/T_2}. \tag{5.2.22}$$

3. 横緩和時間 T_2 が十分に短く，$t \gg T_2$ が成り立つような時間領域では，量子状態 $\rho(t)$ は常に可分であり，エンタングルメントは存在しない．

2 量子ビット状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントの大きさ E_t とコンカレンス C_t を時間の関数としてプロットすると図 5.2 のようになる．また，量子状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントが完全に消失するまでの時間 t を縦緩和時間と横緩和時間の比 T_1/T_2，およびパラメータ w の関数としてプロットすると図 5.3 のようになる．2 量子ビット状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントは，$w^2 = 1$ の場合には時間 t とともに指数関数的に減衰し，$t \to \infty$ の極限でゼロになる．一方，$w^2 \neq 1$ の場合には 2 量子ビット状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントは有限時間で消失する．このような現象は "entanglement sudden death" とよばれている [42, 43]．

5.2.2 非 Markov チャンネルによるエンタングルメントの緩和

次に，外部環境の非 Markov 効果が量子ビットのエンタングルメント緩和に及ぼす影響を調べるために，(4.1.63)-(4.1.66) で定義される非 Markov 量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ によるエンタングルメントのディコヒーレンスを考える [44]．このとき，Bell 状態 $|\Phi_+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ にある 2 つの量子ビットの 1 つが非 Markov 量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ によって時間発展するとき，時刻 t での量子状態 $\rho(t)$ は次のようになる．

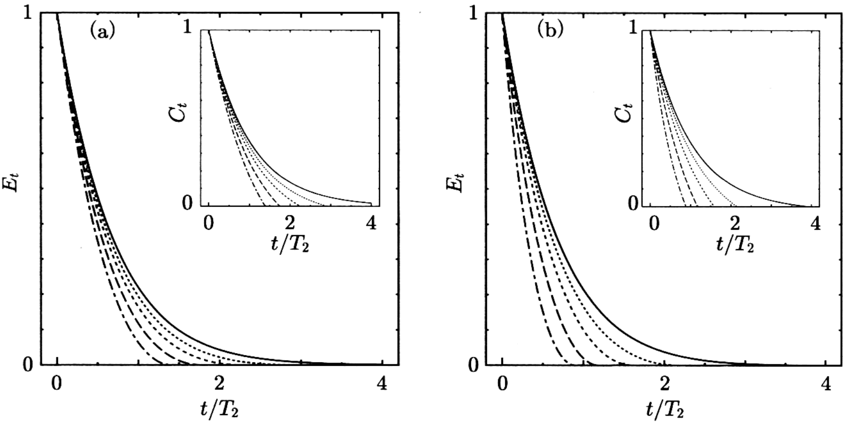


図 **5.2** Bloch チャンネル $\mathcal{L}_t$ による Bell 状態のエンタングルメントの大きさ E_t の時間発展 [41]. (a) $T_1/T_2 = 2.0$; $w = 0$ (–·–), $w = 0.8$ (– –), $w = 0.95$ (-----), $w = 0.99$ (·······), $w = 1.0$ (——). (b) $T_1/T_2 = 0.5$ (–·–), $T_1/T_2 = 1.2$ (– –), $T_1/T_2 = 3.0$ (-----), $T_1/T_2 = 8.0$ (·······), $T_1/T_2 = 100.0$ (——) ; $w = 0.1$. また，埋め込まれたグラフは同じパラメータでのコンカレンスの時間変化をプロットしたものである．

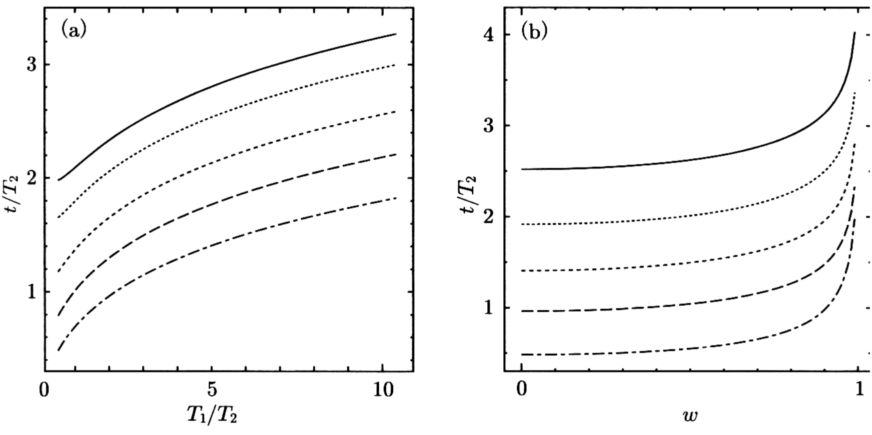


図 **5.3** 量子状態 $\rho(t)$ がエンタングルメントをもつ非可分な状態から可分な状態になる時刻 t のパラメータ T_1/T_2 と w への依存性 [41]. (a) $w = 0.0$ (–·–), $w = 0.82$ (– –), $w = 0.94$ (-----), $w = 0.98$ (·······), $w = 0.99$ (——). (b) $T_1/T_2 = 0.5$ (–·–), $T_1/T_2 = 2.0$ (– –), $T_1/T_2 = 5.0$ (-----), $T_1/T_2 = 12.0$ (·······), $T_1/T_2 = 30.0$ (——). 各グラフの上側の時間領域で量子状態 $\rho(t)$ が可分になる．

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= (\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \\
&= \frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|).
\end{aligned}
\tag{5.2.23}
$$

ここで，パラメータ γ_t は (4.1.62) で与えられる．この場合，行列 $\rho'(t) = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(t)(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ は次の式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &= \frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\,(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|) \\
&\quad - \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|) \\
&\quad - \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|).
\end{aligned}
\tag{5.2.24}
$$

これらの結果を用いて行列 $R = [\sqrt{\rho(t)}\rho'(t)\sqrt{\rho(t)}]^{1/2}$ の固有値 λ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ を計算すると次の結果が得られる．

$$
\lambda_1 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{(1+\gamma_t)^2 - w^2(1-\gamma_t)^2} + 2\gamma_t\right], \tag{5.2.25}
$$

$$
\lambda_2 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{(1+\gamma_t)^2 - w^2(1-\gamma_t)^2} - 2\gamma_t\right], \tag{5.2.26}
$$

$$
\lambda_3 = \frac{1}{4}\sqrt{1-w^2}(1-\gamma_t^2), \tag{5.2.27}
$$

$$
\lambda_4 = \frac{1}{4}\sqrt{1-w^2}(1-\gamma_t^2). \tag{5.2.28}
$$

したがって，量子状態 $\rho(t)$ のコンカレンス C_t は次の式で与えられる．

$$
C_t = \max\left[0,\ \ \gamma_t - \frac{1}{2}\sqrt{1-w^2}(1-\gamma_t^2)\right]. \tag{5.2.29}
$$

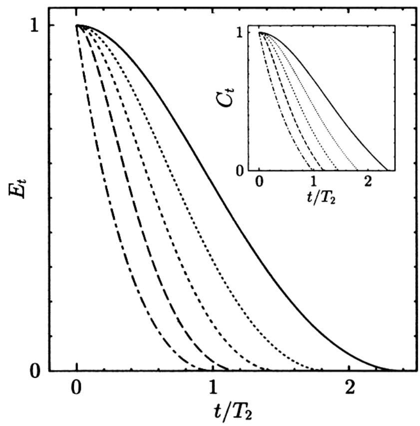


図 5.4 非 Markov 量子チャンネルによる量子状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントの大きさ E_t の時間発展 [44]. ——は $\tau_R/T_2 = 2.0$, ……は $\tau_R/T_2 = 1.0$, -----は $\tau_R/T_2 = 0.5$, − −は $\tau_R/T_2 = 0.2$, −·−は $\tau_R/T_2 = 0.0$（Markov 近似に対応）である．また，$w = -1/2$ である．なお，埋め込まれたグラフはコンカレンス C_t の時間発展を表す．

量子状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントの大きさ E_t はコンカレンス C_t を用いて (5.2.19) で与えられる．量子状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントの大きさ E_t の時間変化をプロットすると図 5.4 のようになる．この図から明らかなように，外部環境の非 Markov 効果は量子ビットの状態のエンタングルメントのディコヒーレンスを抑える方向にはたらく．

外部環境の影響によって量子状態 $\rho(t) = (\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|$ のエンタングルメントが完全に消失する時刻，すなわちコンカレンス C_t がゼロになる時刻は次の式によって決定される．

$$\gamma_t - \frac{1}{2}\sqrt{1-w^2}(1-\gamma_t^2) = 0, \quad \text{または} \quad \gamma_t = \frac{\sqrt{1-w^2}}{\sqrt{2-w^2}+1}. \qquad (5.2.30)$$

この式で決定される時刻以後では，量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ はエンタングルメント破壊チャンネルになる．ここで，パラメータ γ_t が (4.1.62) で与えられることを用いれば，この関係式は次のように書き換えることができる．

$$\frac{t}{T_2}-\frac{\tau_{\mathrm{R}}}{T_2}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}}\right)=\ln\left[\frac{\sqrt{2-w^2}+1}{\sqrt{1-w^2}}\right]. \tag{5.2.31}$$

特に，Markov 近似が成り立つ場合には次のようになる．

$$\frac{t}{T_2}=\ln\left[\frac{\sqrt{2-w^2}+1}{\sqrt{1-w^2}}\right]. \tag{5.2.32}$$

これらの関係式から明らかなように，$w=\pm 1$ の場合には $t\to\infty$ となり，有限の時間領域では量子状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントが完全に消失することはない．また，(5.2.31) を満足する時刻を t_e，(5.2.32) を満足する時刻を $t_e^{(0)}$ と表せば，これらの時刻の間には次の関係式が成り立つ．

$$t_e-\tau_{\mathrm{R}}(1-\mathrm{e}^{-t_e/\tau_{\mathrm{R}}})=t_e^{(0)}. \tag{5.2.33}$$

この式から，不等式 $t_e>t_e^{(0)}$ が成り立つことは明らかである．この結果は，非 Markov 効果（熱浴変数の記憶効果）は量子ビットのエンタングルメントのディコヒーレンスを抑える方向にはたらくことを示している．ところで，(5.2.32) から次の関係式を導くことができる．

$$\frac{t_e}{\tau_{\mathrm{R}}}>\frac{t_e^{(0)}}{\tau_{\mathrm{R}}}=\frac{T_2}{\tau_{\mathrm{R}}}\ln\left[\frac{\sqrt{2-w^2}+1}{\sqrt{1-w^2}}\right]>\frac{T_2}{\tau_{\mathrm{R}}}. \tag{5.2.34}$$

したがって，熱浴変数の相関時間 τ_{R} よりもシステムの緩和時間 T_2 の方がある程度長い場合 $(T_2>\tau_{\mathrm{R}})$，近似的に $\mathrm{e}^{-t_e/\tau_{\mathrm{R}}}\ll 1$ が成り立つので，(5.2.33) から次の関係式が成り立つ．

$$t_e-t_e^{(0)}\approx\tau_{\mathrm{R}}. \tag{5.2.35}$$

すなわち，エンタングルメントが完全に消失するまでの時間 t_e は，量子チャンネルの非 Markov 効果を考慮することによって，熱浴変数の相関時間 τ_{R} だけ長くなる．

5.3 相関をもったランダム周波数変調によるディコヒーレンス

5.3.1 2量子ビット系の時間発展

前節では，量子チャンネルが2量子ビット状態にある量子ビットの1つに作用する場合のエンタングルメントのディコヒーレンスを調べた．この節では，各量子ビットの作用する量子チャンネルの間に相関がある場合を考え，この相関がエンタングルメントのディコヒーレンスに及ぼす影響を調べる [45, 46]．そこで，2個の量子ビットがランダム周波数変調の影響下にあり，かつそれぞれの量子ビットに作用するランダム変数 $\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ の間に相関がある場合を考えよう．議論を簡単にするために，2つのランダム変数 $\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ は定常 Gauss-Markov 過程に従うものと仮定する．このとき，Doob（ドゥーブ）の定理からランダム変数の2時間相関関数 $\langle\omega_j(t)\omega_k(t')\rangle$ $(j,k=1,2)$ は次の式で与えられる*5.

$$\langle\omega_j(t)\omega_k(t')\rangle = \sum_{l=1,2}(\mathrm{e}^{-\mathsf{M}(t-t')})_{jl}\langle\omega_l(0)\omega_k(0)\rangle. \tag{5.3.36}$$

以下では，$G_{jk}=\langle\omega_j(0)\omega_k(0)\rangle$ とおく．このとき，不等式 $G_{11}\geq|G_{12}|$ と $G_{22}\geq|G_{12}|$ が成り立つものと仮定する．一般には，行列 M は任意の 2×2 の非負行列であるが，以下では行列 M を次のような対角行列であると仮定する．

$$\mathsf{M}=\begin{pmatrix}1/\tau_1 & 0\\ 0 & 1/\tau_2\end{pmatrix} \qquad (\tau_k>0) \tag{5.3.37}$$

このとき，各量子ビットに作用するランダム変数 $\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ の相関関数 $\langle\omega_j(t)\omega_k(0)\rangle$ は次の式で与えられる．

$$\langle\omega_1(t)\omega_1(0)\rangle = G_{11}\mathrm{e}^{-t/\tau_1}, \tag{5.3.38}$$

$$\langle\omega_1(t)\omega_2(0)\rangle = G_{12}\mathrm{e}^{-t/\tau_1}, \tag{5.3.39}$$

$$\langle\omega_2(t)\omega_1(0)\rangle = G_{21}\mathrm{e}^{-t/\tau_2}, \tag{5.3.40}$$

$$\langle\omega_2(t)\omega_2(0)\rangle = G_{22}\mathrm{e}^{-t/\tau_2}. \tag{5.3.41}$$

---

*5 Doob の定理の証明は付録 A.3.3 項で与えられる．

2つの量子ビットに対するランダム周波数変調は，次のようなハミルトニアン $H(t)$ によって記述される．

$$H(t)=\frac{1}{2}\hbar\omega_1(t)\sigma_1^z+\frac{1}{2}\hbar\omega_2(t)\sigma_2^z. \tag{5.3.42}$$

Heisenberg の運動方程式 $dA(t)/dt=(i/\hbar)[H(t),A(t)]$ を計算し，その解を求めることによって次の一連の式が得られる．

$$\sigma_k^-(t)=\exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\omega_k(\tau)\right]\sigma_k^-(0), \tag{5.3.43}$$

$$\sigma_k^+(t)=\exp\left[i\int_0^t d\tau\,\omega_k(\tau)\right]\sigma_k^+(0), \tag{5.3.44}$$

$$\sigma_k^z(t)=\sigma_k^z(0)\qquad (k=1,2), \tag{5.3.45}$$

$$\sigma_1^-(t)\sigma_2^-(t)=\exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\left[\omega_1(\tau)+\omega_2(\tau)\right]\right]\sigma_1^-(0)\sigma_2^-(0), \tag{5.3.46}$$

$$\sigma_1^+(t)\sigma_2^+(t)=\exp\left[i\int_0^t d\tau\,\left[\omega_1(\tau)+\omega_2(\tau)\right]\right]\sigma_1^+(0)\sigma_2^+(0), \tag{5.3.47}$$

$$\sigma_1^-(t)\sigma_2^+(t)=\exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\left[\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)\right]\right]\sigma_1^-(0)\sigma_2^+(0), \tag{5.3.48}$$

$$\sigma_1^+(t)\sigma_2^-(t)=\exp\left[i\int_0^t d\tau\,\left[\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)\right]\right]\sigma_1^+(0)\sigma_2^-(0), \tag{5.3.49}$$

$$\sigma_1^-(t)\sigma_2^z(t)=\exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\omega_1(\tau)\right]\sigma_1^-(0)\sigma_2^z(0), \tag{5.3.50}$$

$$\sigma_1^z(t)\sigma_2^-(t)=\exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\omega_2(\tau)\right]\sigma_1^z(0)\sigma_2^-(0). \tag{5.3.51}$$

ランダム変数 $\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ が (5.3.38)-(5.3.41) を満足する定常 Gauss-Markov 過程であることを考慮して，これらの演算子の初期状態と確率過程に関する平均値を計算すると次のようになる．

$$\langle\sigma_k^-(t)\rangle = \left\langle \exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\omega_k(\tau)\right]\right\rangle \langle\sigma_k^-(0)\rangle$$
$$= f_{kk}(t)\langle\sigma_k^-(0)\rangle, \tag{5.3.52}$$
$$\langle\sigma_k^+(t)\rangle = \left\langle \exp\left[i\int_0^t d\tau\,\omega_k(\tau)\right]\right\rangle \langle\sigma_k^+(0)\rangle$$
$$= f_{kk}(t)\langle\sigma_k^+(0)\rangle, \tag{5.3.53}$$
$$\langle\sigma_k^z(t)\rangle = \langle\sigma_k^z(0)\rangle \qquad (k=1,2), \tag{5.3.54}$$
$$\langle\sigma_1^-(t)\sigma_2^-(t)\rangle = \left\langle \exp\left[-i\int_0^t d\tau\ [\omega_1(\tau)+\omega_2(\tau)]\right]\right\rangle \langle\sigma_1^-(0)\sigma_2^-(0)\rangle$$
$$= f_{11}(t)f_{22}(t)f_{12}(t)f_{21}(t)\langle\sigma_1^-(0)\sigma_2^-(0)\rangle, \tag{5.3.55}$$
$$\langle\sigma_1^+(t)\sigma_2^+(t)\rangle = \left\langle \exp\left[i\int_0^t d\tau\ [\omega_1(\tau)+\omega_2(\tau)]\right]\right\rangle \langle\sigma_1^+(0)\sigma_2^+(0)\rangle$$
$$= f_{11}(t)f_{22}(t)f_{12}(t)f_{21}(t)\langle\sigma_1^+(0)\sigma_2^+(0)\rangle, \tag{5.3.56}$$
$$\langle\sigma_1^-(t)\sigma_2^+(t)\rangle = \left\langle \exp\left[-i\int_0^t d\tau\ [\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)]\right]\right\rangle \langle\sigma_1^-(0)\sigma_2^+(0)\rangle$$
$$= f_{11}(t)f_{22}(t)f_{12}^{-1}(t)f_{21}^{-1}(t)\langle\sigma_1^-(0)\sigma_2^+(0)\rangle, \tag{5.3.57}$$
$$\langle\sigma_1^+(t)\sigma_2^-(t)\rangle = \left\langle \exp\left[i\int_0^t d\tau\ [\omega_1(\tau)-\omega_2(\tau)]\right]\right\rangle \langle\sigma_1^+(0)\sigma_2^-(0)\rangle$$
$$= f_{11}(t)f_{22}(t)f_{12}^{-1}(t)f_{21}^{-1}(t)\langle\sigma_1^+(0)\sigma_2^-(0)\rangle, \tag{5.3.58}$$
$$\langle\sigma_1^-(t)\sigma_2^z(t)\rangle = \left\langle \exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\omega_1(\tau)\right]\right\rangle \langle\sigma_1^-(0)\sigma_2^z(0)\rangle$$
$$= f_{11}(t)\langle\sigma_1^-(0)\sigma_2^z(0)\rangle, \tag{5.3.59}$$
$$\langle\sigma_1^z(t)\sigma_2^-(t)\rangle = \left\langle \exp\left[-i\int_0^t d\tau\,\omega_2(\tau)\right]\right\rangle \langle\sigma_1^z(0)\sigma_2^-(0)\rangle$$
$$= f_{22}(t)\langle\sigma_1^z(0)\sigma_2^-(0)\rangle. \tag{5.3.60}$$

ここで，関数 $f_{jk}(t)$ は次の式で与えられる．

$$f_{jk}(t) = \exp\left[-G_{jk}\tau_j^2\left(\frac{t}{\tau_j} - 1 + \mathrm{e}^{-t/\tau_j}\right)\right]$$
$$\equiv \exp[-\phi_{jk}(t)]. \tag{5.3.61}$$

また，関数 $\phi_{jk}(t)$ は次の式で定義される．

$$\phi_{jk}(t) = G_{jk}\tau_j^2 \left(\frac{t}{\tau_j} - 1 + \mathrm{e}^{-t/\tau_j} \right). \tag{5.3.62}$$

一般に，時刻 t での 2 量子ビット状態 $\rho(t)$ は，各量子ビットの Pauli 行列を用いて次の形に表すことができる．

$$\rho(t) = \frac{1}{4}(1 \otimes 1) + \frac{1}{4} \sum_{\mu=x,y,z} A_\mu(t)\sigma_1^\mu \otimes 1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu=x,y,z} B_\mu(t) 1 \otimes \sigma_2^\mu + \frac{1}{4} \sum_{\mu=x,y,z} \sum_{\mu'=x,y,z} C_{\mu\mu'}(t)\sigma_1^\mu \otimes \sigma_2^{\mu'}. \tag{5.3.63}$$

ここで，展開係数 $A_\mu(t), B_\mu(t), C_{\mu\mu'}(t)$ と Pauli 行列の期待値の間には次の関係式が成り立つ．

$$A_\mu(t) = \langle \sigma_1^\mu(t) \rangle, \tag{5.3.64}$$

$$B_\mu(t) = \langle \sigma_2^\mu(t) \rangle, \tag{5.3.65}$$

$$C_{\mu\mu'}(t) = \langle \sigma_1^\mu(t)\sigma_2^{\mu'}(t) \rangle. \tag{5.3.66}$$

また，ベクトル $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ を基底に選んだ場合の量子状態 $\rho(t)$ の行列表現は次のようになる．

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) & \rho_{13}(t) & \rho_{14}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & \rho_{24}(t) \\ \rho_{31}(t) & \rho_{32}(t) & \rho_{33}(t) & \rho_{34}(t) \\ \rho_{41}(t) & \rho_{42}(t) & \rho_{43}(t) & \rho_{44}(t) \end{pmatrix} \tag{5.3.67}$$

ここで，各行列要素は展開係数 $A_\mu(t), B_\mu(t), C_{\mu\mu'}(t)$ を用いて次の式で与えられる．

$$\rho_{11}(t) = \frac{1}{4}\left[1 + A_z(t) + B_z(t) + C_{zz}(t)\right], \tag{5.3.68}$$

$$\rho_{12}(t) = \frac{1}{4}\left[B_x(t) - iB_y(t) + C_{zx}(t) - iC_{zy}(t)\right], \tag{5.3.69}$$

$$\rho_{13}(t) = \frac{1}{4}\left[A_x(t) - iA_y(t) + C_{xz}(t) - iC_{yz}(t)\right], \tag{5.3.70}$$

$$\rho_{14}(t) = \frac{1}{4}\left[C_{xx}(t) - C_{yy}(t) - iC_{xy}(t) - iC_{yx}(t)\right], \tag{5.3.71}$$

$$\rho_{21}(t) = \frac{1}{4}\left[B_x(t) + iB_y(t) + C_{zx}(t) + iC_{zy}(t)\right], \tag{5.3.72}$$

$$\rho_{22}(t) = \frac{1}{4}\left[1 + A_z(t) - B_z(t) - C_{zz}(t)\right], \tag{5.3.73}$$

$$\rho_{23}(t) = \frac{1}{4}\left[C_{xx}(t) + C_{yy}(t) + iC_{xy}(t) - iC_{yx}(t)\right], \tag{5.3.74}$$

$$\rho_{24}(t) = \frac{1}{4}\left[A_x(t) - iA_y(t) - C_{xz}(t) + iC_{yz}(t)\right], \tag{5.3.75}$$

$$\rho_{31}(t) = \frac{1}{4}\left[A_x(t) + iA_y(t) + C_{xz}(t) + iC_{yz}(t)\right], \tag{5.3.76}$$

$$\rho_{32}(t) = \frac{1}{4}\left[C_{xx}(t) + C_{yy}(t) - iC_{xy}(t) + iC_{yx}(t)\right], \tag{5.3.77}$$

$$\rho_{33}(t) = \frac{1}{4}\left[1 - A_z(t) + B_z(t) - C_{zz}(t)\right], \tag{5.3.78}$$

$$\rho_{34}(t) = \frac{1}{4}\left[B_x(t) - iB_y(t) - C_{zx}(t) + iC_{zy}(t)\right], \tag{5.3.79}$$

$$\rho_{41}(t) = \frac{1}{4}\left[C_{xx}(t) - C_{yy}(t) + iC_{xy}(t) + iC_{yx}(t)\right], \tag{5.3.80}$$

$$\rho_{42}(t) = \frac{1}{4}\left[A_x(t) + iA_y(t) - C_{xz}(t) - iC_{yz}(t)\right], \tag{5.3.81}$$

$$\rho_{43}(t) = \frac{1}{4}\left[B_x(t) + iB_y(t) - C_{zx}(t) - iC_{zy}(t)\right], \tag{5.3.82}$$

$$\rho_{44}(t) = \frac{1}{4}\left[1 - A_z(t) - B_z(t) + C_{zz}(t)\right]. \tag{5.3.83}$$

展開係数 $A_\mu(t), B_\mu(t), C_{\mu\mu'}(t)$ の時間依存性は (5.3.52)-(5.3.60) と (5.3.64)-(5.3.66) から (5.3.61) で与えられる関数 $f_{jk}(t) = \exp[-\phi_{jk}(t)]$ を用いて次のように表すことができる.

$$A_x(t) = \exp[-\phi_{11}(t)]A_x(0), \tag{5.3.84}$$

$$A_y(t) = \exp[-\phi_{11}(t)]A_y(0), \tag{5.3.85}$$

$$A_z(t) = A_z(0), \tag{5.3.86}$$

$$B_x(t) = \exp[-\phi_{22}(t)]B_x(0), \tag{5.3.87}$$

$$B_y(t) = \exp[-\phi_{22}(t)]B_y(0), \tag{5.3.88}$$

$$B_z(t) = B_z(0), \tag{5.3.89}$$

$$C_{xx}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \cosh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{xx}(0) \\ + \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \sinh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{yy}(0), \tag{5.3.90}$$

$$C_{yy}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \cosh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{yy}(0) \\ + \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \sinh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{xx}(0), \tag{5.3.91}$$

$$C_{zz}(t) = C_{zz}(0), \tag{5.3.92}$$

$$C_{xy}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \cosh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{xy}(0) \\ - \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \sinh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{yx}(0), \tag{5.3.93}$$

$$C_{yx}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \cosh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{yx}(0) \\ - \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t)] \sinh[\phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] C_{xy}(0), \tag{5.3.94}$$

$$C_{xz}(t) = \exp[-\phi_{11}(t)] C_{xz}(0), \tag{5.3.95}$$

$$C_{yz}(t) = \exp[-\phi_{11}(t)] C_{yz}(0), \tag{5.3.96}$$

$$C_{zx}(t) = \exp[-\phi_{22}(t)] C_{zx}(0), \tag{5.3.97}$$

$$C_{zy}(t) = \exp[-\phi_{22}(t)] C_{zy}(0). \tag{5.3.98}$$

これらの式を (5.3.68)-(5.3.83) に代入して行列要素 $\rho_{jk}(t)$ の時間発展を求めれば次の結果が得られる.

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0), \tag{5.3.99}$$

$$\rho_{12}(t) = \exp[-\phi_{22}(t)] \rho_{12}(0), \tag{5.3.100}$$

$$\rho_{13}(t) = \exp[-\phi_{11}(t)] \rho_{13}(0), \tag{5.3.101}$$

$$\rho_{14}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t) - \phi_{12}(t) - \phi_{21}(t)] \rho_{14}(0), \tag{5.3.102}$$

$$\rho_{21}(t) = \exp[-\phi_{22}(t)] \rho_{21}(0), \tag{5.3.103}$$

$$\rho_{22}(t) = \rho_{22}(0), \tag{5.3.104}$$

$$\rho_{23}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t) + \phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] \rho_{23}(0), \tag{5.3.105}$$

$$\rho_{24}(t) = \exp[-\phi_{11}(t)] \rho_{24}(0), \tag{5.3.106}$$

$$\rho_{31}(t) = \exp[-\phi_{11}(t)] \rho_{31}(0), \tag{5.3.107}$$

$$\rho_{32}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t) + \phi_{12}(t) + \phi_{21}(t)] \rho_{32}(0), \tag{5.3.108}$$

$$\rho_{33}(t) = \rho_{33}(0), \tag{5.3.109}$$

$$\rho_{34}(t) = \exp[-\phi_{22}(t)]\rho_{34}(0), \tag{5.3.110}$$

$$\rho_{41}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t) - \phi_{12}(t) - \phi_{21}(t)]\rho_{41}(0), \tag{5.3.111}$$

$$\rho_{42}(t) = \exp[-\phi_{11}(t)]\rho_{42}(0), \tag{5.3.112}$$

$$\rho_{43}(t) = \exp[-\phi_{22}(t)]\rho_{43}(0), \tag{5.3.113}$$

$$\rho_{44}(t) = \rho_{44}(0). \tag{5.3.114}$$

これらの結果を用いれば，相関をもったランダム周波数変調の影響による量子ビットのエンタングルメントのディコヒーレンスを調べることができる.

5.3.2 エンタングルメントの緩和

初期時刻 ($t=0$) での 2 量子ビット状態として次のような混合状態を考える [47].

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \tag{5.3.115}$$

ここで，量子状態の規格化条件 ($\mathrm{Tr}\,\rho_1 = 1$) と非負性 ($\rho_1 > 0$) からパラメータ $a, b,$ c, d, z は次の関係式を満足しなければならない.

$$a+b+c+d=1, \qquad \sqrt{bc} \geq |z|, \tag{5.3.116}$$

$$a \geq 0, \qquad b \geq 0, \qquad c \geq 0, \qquad d \geq 0. \tag{5.3.117}$$

量子状態 ρ_1 のコンカレンス $C(\rho_1)$ は次の式で与えられる.

$$C(\rho_1) = 2\max\left[0, |z| - \sqrt{ad}\right]. \tag{5.3.118}$$

したがって，量子状態 ρ_1 にエンタングルメントが存在するための必要十分条件は，不等式 $|z| > \sqrt{ad}$ が成り立つことである．また，次の式で定義される混合状態 ρ_2 を考える.

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & z \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ z^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{5.3.119}$$

ここで，パラメータ a, b, c, d, z は次の関係式を満足する．

$$a+b+c+d=1, \qquad \sqrt{ad} \geq |z|, \tag{5.3.120}$$

$$a \geq 0, \qquad b \geq 0, \qquad c \geq 0, \qquad d \geq 0. \tag{5.3.121}$$

この量子状態のコンカレンス $C(\rho_2)$ を計算すれば，次の結果が得られる．

$$C(\rho_2) = 2\max\left[0, |z| - \sqrt{bc}\right]. \tag{5.3.122}$$

したがって，量子状態 ρ_2 にエンタングルメントが存在するための必要十分条件は，不等式 $|z| > \sqrt{bc}$ が成り立つことである．

初期時刻に量子状態 ρ_1 と ρ_2 にある 2 個の量子ビットが相関をもったランダム周波数変調を受けるとき，(5.3.99)-(5.3.114) から時刻 t では次のような量子状態になる．

$$\rho_1(t) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & z\,F_+(t) & 0 \\ 0 & z^*\,F_+(t) & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \tag{5.3.123}$$

$$\rho_2(t) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & z\,F_-(t) \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ z^*\,F_-(t) & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{5.3.124}$$

ここで，関数 $F_\pm(t)$ は次の式で与えられる．

$$F_{\pm}(t) = \exp[-\phi_{11}(t) - \phi_{22}(t) \pm \phi_{12}(t) \pm \phi_{21}(t)]. \qquad (5.3.125)$$

ランダム変数 $\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ の間に正の相関 $(G_{12} > 0)$ が存在すれば，不等式 $F_+(t) > F_-(t)$ が成り立ち，負の相関 $(G_{12} < 0)$ が存在すれば，不等式 $F_+(t) < F_-(t)$ が成り立つ．また，等号 $F_+(t) = F_-(t)[\equiv F_0(t)]$ が成り立つのはランダム変数 $\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ の間に相関が存在しない場合 $(G_{12} = 0)$ である．量子状態 $\rho_1(t)$ と $\rho_2(t)$ のコンカレンスは次のようになる．

$$C[\rho_1(t)] = 2\max\left[0, |z|F_+(t) - \sqrt{ad}\right], \qquad (5.3.126)$$

$$C[\rho_2(t)] = 2\max\left[0, |z|F_-(t) - \sqrt{bc}\right]. \qquad (5.3.127)$$

また，2つのランダム変数 $\omega_1(t)$ と $\omega_2(t)$ の間に相関がない場合のコンカレンス $C_0[\rho_1(t)]$ と $C_0[\rho_2(t)]$ は (5.3.126) と (5.3.127) において関数 $F_{\pm}(t)$ のかわりに関数 $F_0(t)$ で置き換えることによって得られる．したがって，2つのランダム変数の間に正の相関が存在する場合には次の式が成り立つ．

$$C[\rho_1(t)] > C_0[\rho_1(t)], \qquad C[\rho_2(t)] < C_0[\rho_2(t)]. \qquad (5.3.128)$$

一方，2つのランダム変数の間に負の相関が存在する場合には次の式が成り立つ．

$$C[\rho_1(t)] < C_0[\rho_1(t)], \qquad C[\rho_2(t)] > C_0[\rho_2(t)]. \qquad (5.3.129)$$

この結果は，ランダム変数の間の正の相関は量子状態 $\rho_1(t)$ のエンタングルメントのディコヒーレンスを抑える方向にはたらき，量子状態 $\rho_2(t)$ のエンタングルメントのディコヒーレンスを促進する方向にはたらく．一方，ランダム変数の間の負の相関は量子状態 $\rho_2(t)$ のエンタングルメントのディコヒーレンスを抑える方向にはたらき，量子状態 $\rho_1(t)$ のエンタングルメントのディコヒーレンスを促進する方向にはたらく．

量子状態 ρ_1 の例として次の式で定義される Werner（ワーナー）状態 W_F を考える．

$$
\begin{aligned}
W_F &= F|\Psi_\pm\rangle\langle\Psi_\pm| + \frac{1-F}{3}\,(1\otimes 1 - |\Psi_\pm\rangle\langle\Psi_\pm|) \\
&= \frac{4F-1}{3}|\Psi_\pm\rangle\langle\Psi_\pm| + \frac{1-F}{3} 1\otimes 1 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1-F) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(1+2F) & \pm\frac{1}{6}(4F-1) & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{6}(4F-1) & \frac{1}{6}(1+2F) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(1-F) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.3.130}
$$

ここで，$|\Psi_\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$ である．Werner 状態 W_F のコンカレンス $C(F)$ は次の式で与えられる．

$$
C(F) = \max[0, 2F-1]. \tag{5.3.131}
$$

したがって，Werner 状態 W_F にエンタングルメントが存在するための必要十分条件は，パラメータ F が不等式 $F > \frac{1}{2}$ を満足することである．条件 $F > \frac{1}{2}$ を満足する Werner 状態 W_F にある 2 つの量子ビットが相関をもったランダム周波数変調の影響下で時間発展するとき，時刻 t でのコンカレンス $C_t(F)$ は次のようになる．

$$
C_t(F) = \max\left[0, \frac{4F-1}{3}F_+(t) - \frac{2-2F}{3}\right]. \tag{5.3.132}
$$

したがって，時刻 t においてエンタングルメントが存在するための条件は次の不等式が成り立つことである．

$$
F_+(t) > \frac{2-2F}{4F-1}. \tag{5.3.133}
$$

特に，尖鋭化極限 $(G_{jk}\tau_j^2 \ll 1)$ では $F_+(t) = \mathrm{e}^{-[(G_{11}-G_{12})\tau_1 + (G_{22}-G_{12})\tau_2]t}$ が成り立つので，Werner 状態にエンタングルメントが存在する時間領域は，次の不等式で与えられる．

$$
0 \leq t < t_e \equiv \frac{1}{(G_{11}-G_{12})\tau_1 + (G_{22}-G_{12})\tau_2} \ln\left(\frac{4F-1}{2-2F}\right). \tag{5.3.134}
$$

初期時刻での量子状態が Bell 状態の場合 ($F=1$)，エンタングルメントが完全に破壊されるまでの時間は $t_e\to\infty$ となる．この結果は，ランダム周波数変調は完全なエンタングルメントをもつ Bell 状態を有限の時間で可分な状態にすることはできない．言い換えれば，ランダム周波数変調はエンタングルメント破壊チャンネルにはなり得ない．一方，(5.3.130) において，$|\Psi_\pm\rangle$ を $|\Phi_\pm\rangle$ で置き換えて得られる別のタイプの Werner 状態 W'_F は量子状態 ρ_2 の特別な場合である．Werner 状態 W'_F は Werner 状態 W_F と同じ大きさのコンカレンスをもつが，時刻 t のコンカレンス $C'_t(F)$ は次のようになる．

$$C'_t(F)=\max\left[0,\frac{4F-1}{3}F_-(t)-\frac{2-2F}{3}\right]. \tag{5.3.135}$$

したがって，ランダム変数が相関をもつ限り $C_t(F)\neq C'_t(F)$ である．この結果から，初期時刻において同じ大きさのエンタングルメントをもつ量子状態であっても，ランダム変数の間に相関が存在する場合には，時間発展した後の量子状態のエンタングルメントの大きさは必ずしも一致しないことがわかる．

5.4 光子系のエンタングルメントのディコヒーレンス

5.4.1 2 モード光子系の時間発展

これまでは量子ビットのエンタングルメントのディコヒーレンスを議論してきたが，この節では調和振動子系のエンタングルメントのディコヒーレンスを考察する．調和振動子は連続変数量子情報処理における重要なリソースである．以下では，外部環境の影響下での調和振動子の時間発展が (4.3.100) で与えられる非 Markov 近似の量子マスター方程式によって決定される場合を考える [48]．また，(4.3.100) の右辺に現れる関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は (A.1.10) と (A.1.11) で与えられるのものと仮定する．このとき，単一モード調和振動子の量子状態 $\rho(t)$ は，相互作用描像では次の方程式によって決定される．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)&=\kappa\tau_{\mathrm{R}}\dot{f}(t)\bar{n}_{\mathrm{th}}\left([a^\dagger,\rho(t)a]+[a^\dagger\rho(t),a]\right)\\&\quad+\kappa\tau_{\mathrm{R}}\dot{f}(t)(\bar{n}_{\mathrm{th}}+1)\left([a,\rho(t)a^\dagger]+[a\rho(t),a^\dagger]\right).\end{aligned} \tag{5.4.136}$$

ここで，κ は減衰定数，τ_{R} は熱浴変数の相関時間，$\bar{n}_{\mathrm{th}}$ は熱雑音の平均光子数で

ある．また，$\dot{f}(t)$ は関数 $f(t)$ の時間微分を表し，関数 $f(t)$ は次の式で与えられる．

$$f(t) = \frac{t}{\tau_{\mathrm{R}}} - 1 + \mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}}. \tag{5.4.137}$$

特に，Markov 近似 $(t/\tau_{\mathrm{R}} \to \infty)$ が成り立つ場合には $\tau_{\mathrm{R}}\dot{f}(t) \to 1$ となり，(5.4.136) の右辺の係数は時間に依存しない定数になる．ここで，(4.3.108) で定義される量子状態 $\rho(t)$ を記述する c-数関数 $F_s(z;t)$ を導入すれば，(4.3.126)-(4.3.129) から量子マスター方程式 (4.3.100) の解を表す c-数関数 $F_s(z;t)$ は次の式で与えられる．

$$F_s(z;t) = \int \frac{d^2 z'}{\pi} G_s(z|z';t) F_s(z';0), \tag{5.4.138}$$

$$G_s(z|z';t) = \frac{1}{(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \frac{1+s}{2})(1-\gamma_t^2)} \exp\left[-\frac{|z - z'\gamma_t|^2}{(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \frac{1+s}{2})(1-\gamma_t^2)}\right]. \tag{5.4.139}$$

ここで，時間に依存するパラメータ γ_t は次の式で定義される．

$$\gamma_t = \mathrm{e}^{-\kappa\tau_{\mathrm{R}} f(t)}. \tag{5.4.140}$$

次に，2 個の調和振動子から構成される 2 モード系を考える．各調和振動子は独立に外部環境の影響を受け，それぞれの減衰定数を κ_k，外部環境の変数の相関時間を τ_{R_k}，および熱雑音の平均光子数を $\bar{n}_{\mathrm{th}\,k}$ とする．このとき，2 個の調和振動子から成るシステムの量子状態 $\rho(t)$ の時間発展は次の量子マスター方程式によって決定される．

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = [\mathcal{K}_1(t) \otimes \mathcal{I}]\rho(t) + [\mathcal{I} \otimes \mathcal{K}_2(t)]\rho(t). \tag{5.4.141}$$

ここで，写像 $\mathcal{K}_k(t)$ $(k = 1, 2)$ は次の式で定義される．

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k(t)X = {}& \kappa_k \tau_{\mathrm{R}_k} \dot{f}_k(t) \bar{n}_{\mathrm{th}\,k} \left([a_k^\dagger, X a_k] + [a_k^\dagger X, a_k]\right) \\ & + \kappa_k \tau_{\mathrm{R}_k} \dot{f}_k(t)(\bar{n}_{\mathrm{th}\,k} + 1)\left([a_k, X a_k^\dagger] + [a_k X, a_k^\dagger]\right). \end{aligned} \tag{5.4.142}$$

また，$a_k^\dagger$ と a_k は各モードの生成演算子と消滅演算子であり，$\dot{f}_k(t) = df_k(t)/dt$,

および $f_k(t) = t/\tau_{\mathrm{R}_k} - 1 + \mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}_k}}$ である．2 モード量子状態 $\rho(t)$ を表現する s-順序の c-数関数を $F_s(z_1, z_2; t)$ と表せば，量子マスター方程式 (5.4.141) の解は次の式で与えられる．

$$F_s(z_1, z_2; t) = \int \frac{d^2 z_1'}{\pi} \int \frac{d^2 z_2'}{\pi} G_s^{(1)}(z_1|z_1'; t) G_s^{(2)}(z_2|z_2'; t) F_s(z_1', z_2'; 0), \tag{5.4.143}$$

$$G_s^{(k)}(z|z'; t) = G_s(z|z'; t)\bigg|_{\bar{n}_{\mathrm{th}} \to \bar{n}_{\mathrm{th}\,k},\, \gamma_t \to \gamma_{k\,t}}. \tag{5.4.144}$$

ここで，$\gamma_{k\,t} = \mathrm{e}^{-\kappa_k \tau_{\mathrm{R}_k} f_k(t)}$ であり，関数 $G_s(z|z'; t)$ は (5.4.139) で与えられる．また，2 モード量子状態 $\rho(t)$ の s-順序の特性関数 $C_s(z_1, z_2; t)$ は，(5.4.143) を Fourier 変換によって求めることができる．簡単な計算によって次の結果が得られる．

$$C_s(z_1, z_2; t) = \mathcal{G}_s^{(1)}(z_1; t) \mathcal{G}_s^{(2)}(z_2; t) C_s(\gamma_{1\,t} z_1, \gamma_{2\,t} z_2; 0), \tag{5.4.145}$$

$$\mathcal{G}_s^{(k)}(z; t) = \exp\left[-\left(\bar{n}_{\mathrm{th}\,k} + \frac{1+s}{2}\right)(1 - \gamma_{k\,t}^2)|z|^2\right]. \tag{5.4.146}$$

2 モード量子状態の特性関数はエンタングルメントを議論する場合に重要な役割を果たす．

2 モード量子状態 ρ の対称順序の特性関数は，並進演算子の平均値として $C(z_1, z_2) = \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{z_1 a_1^\dagger - z_1^* a_1} \mathrm{e}^{z_2 a_2^\dagger - z_2^* a_2} \rho)$ によって与えられる．特に，Gauss 状態の場合には特性関数 $C(z_1, z_2)$ は次のような形に表すことができる．

$$C(z_1, z_2) = \exp\left(-\frac{1}{2} \mathsf{z}^\dagger \mathsf{C} \mathsf{z}\right), \qquad \mathsf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1^* \\ z_2 \\ z_2^* \end{pmatrix}. \tag{5.4.147}$$

ここでは，$\langle a_k \rangle = 0$ $(k = 1, 2)$ であると仮定し，以下の議論において重要でない指数部分の線形項は省略した[*6]．また，各調和振動子の自由運動はエンタングルメ

*6 指数部分の線形項は局所的なユニタリ変換 $D(\langle a_1 \rangle) \otimes D(\langle a_2 \rangle)$ を行うことによって消去することが常に可能である．このようなユニタリ変換は量子状態の純粋性，非古典性，エンタングル

ントの大きさに影響を与えないので，相互作用描像での量子状態と Schrödinger 描像での量子状態を区別せずに用いることにする．(5.4.147) の $C(z_1, z_2)$ を特徴付ける 4×4 エルミート行列 C は次の式で与えられる [49].

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} \bar{n}_1 + \frac{1}{2} & \bar{m}_1 & \bar{m}_s & \bar{m}_c \\ \bar{m}_1^* & \bar{n}_1 + \frac{1}{2} & \bar{m}_c^* & \bar{m}_s^* \\ \bar{m}_s^* & \bar{m}_c & \bar{n}_2 + \frac{1}{2} & \bar{m}_2 \\ \bar{m}_c^* & \bar{m}_s & \bar{m}_2^* & \bar{n}_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.4.148}$$

ここで，各行列要素は次の式で定義される*7.

$$\bar{n}_1 = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle, \qquad \bar{n}_2 = \langle a_2^\dagger a_2 \rangle, \tag{5.4.149}$$

$$\bar{m}_1 = -\langle a_1^2 \rangle, \qquad \bar{m}_2 = -\langle a_2^2 \rangle, \tag{5.4.150}$$

$$\bar{m}_s = \langle a_1 a_2^\dagger \rangle, \qquad \bar{m}_c = -\langle a_1 a_2 \rangle. \tag{5.4.151}$$

2 モード量子状態の場合の Heisenberg の不確定性関係は，特性関数を特徴付ける行列 C を用いて次の形に表すことができる．

$$\mathsf{C} + \frac{1}{2}\mathsf{E} \geq 0, \qquad \mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.4.152}$$

また，2 モード Gauss 状態 ρ にエンタングルメントが存在しないための必要十分条件は，部分転置をとったものも量子状態を表すことである．この条件は次のように表すことができる．

メントに影響を与えない．

*7 $\langle a_k \rangle \neq 0$ の場合には，これらの式に現れる演算子 a_k を $\Delta a_k = a_k - \langle a_k \rangle$ で置き換えればよい．

$$\mathsf{T}_1\mathsf{C}\mathsf{T}_1+\frac{1}{2}\mathsf{E}\geq 0,\qquad \mathsf{T}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{5.4.153}$$

$$\mathsf{T}_2\mathsf{C}\mathsf{T}_2+\frac{1}{2}\mathsf{E}\geq 0,\qquad \mathsf{T}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.\tag{5.4.154}$$

これらの条件は，部分転置をとることによって得られる“量子状態”において Heisenberg の不確定性関係が成り立つことと等価である．

2 モード Gauss 状態 ρ の Wigner 関数 $W(z_1,z_2)$，伏見 Q 関数 $Q(z_1,z_2)$，および Glauber-Sudarshan の P 関数 $P(z_1,z_2)$ はそれぞれ次の形に表すことができる．

$$W(z_1,z_2)=\sqrt{\det\mathsf{W}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathsf{z}^\dagger\mathsf{W}\mathsf{z}\right),\tag{5.4.155}$$

$$Q(z_1,z_2)=\sqrt{\det\mathsf{Q}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathsf{z}^\dagger\mathsf{Q}\mathsf{z}\right),\tag{5.4.156}$$

$$P(z_1,z_2)=\sqrt{\det\mathsf{P}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathsf{z}^\dagger\mathsf{P}\mathsf{z}\right).\tag{5.4.157}$$

ここで，各 Gauss 分布を特徴付ける 4×4 エルミート行列 $\mathsf{W},\mathsf{Q},\mathsf{P}$ はそれぞれ次の式で与えられる．

$$\mathsf{W}=\mathsf{E}\mathsf{C}^{-1}\mathsf{E},\tag{5.4.158}$$

$$\mathsf{Q}=\mathsf{E}\left(\mathsf{C}+\frac{1}{2}\right)^{-1}\mathsf{E},\tag{5.4.159}$$

$$\mathsf{P}=\mathsf{E}\left(\mathsf{C}-\frac{1}{2}\right)^{-1}\mathsf{E}.\tag{5.4.160}$$

以下では，2 モード Gauss 状態の対称順序の特性関数 $C(z_1,z_2)$ を特徴付ける行列 C が次の式で与えられる場合を考える．

$$\mathsf{C}=\begin{pmatrix}\bar{n}_1+\frac{1}{2} & 0 & 0 & \bar{m}\\ 0 & \bar{n}_1+\frac{1}{2} & \bar{m}^* & 0\\ 0 & \bar{m} & \bar{n}_2+\frac{1}{2} & 0\\ \bar{m}^* & 0 & 0 & \bar{n}_2+\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{5.4.161}$$

2 モードスクィーズド状態はこのタイプの Gauss 状態である*8．このとき，(5.4.152) で与えられる Heisenberg の不確定性関係は次のようになる．

$$\bar{n}_1(\bar{n}_1+1)\geq|\bar{m}|^2, \qquad \bar{n}_2(\bar{n}_2+1)\geq|\bar{m}|^2. \tag{5.4.164}$$

また，Wigner 関数 $W(z_1,z_2)$ の特徴付ける 4×4 エルミート行列 W は次のようになる．

$$\mathsf{W}=\frac{1}{(\bar{n}_1+\frac{1}{2})(\bar{n}_2+\frac{1}{2})-|\bar{m}|^2}\times\begin{pmatrix}\bar{n}_2+\frac{1}{2} & 0 & 0 & \bar{m}\\ 0 & \bar{n}_2+\frac{1}{2} & \bar{m}^* & 0\\ 0 & \bar{m} & \bar{n}_1+\frac{1}{2} & 0\\ \bar{m}^* & 0 & 0 & \bar{n}_1+\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{5.4.165}$$

一方，伏見 Q 関数 $Q(z_1,z_2)$ と Glauber-Sudarshan の P 関数 $P(z_1,z_2)$ を特徴付ける行列 Q と P はそれぞれ次の式で与えられる．

---

*8　2 モードスクィーズド状態は次の式で定義される．

$$|r,\phi\rangle=\mathrm{e}^{r(abe^{-i\phi}-a^\dagger b^\dagger e^{i\phi})}|0,0\rangle \tag{5.4.162}$$

ここで，$|0,0\rangle$ は 2 つのモードの真空状態である．この式の右辺を計算することによって，2 モードスクィーズド状態は次の形に表すことができる．

$$|r,\phi\rangle=\frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{e}^{i\phi}\tanh r)^n|n,n\rangle \tag{5.4.163}$$

2 モードスクィーズド状態は量子光学や量子情報処理におけるエンタングルメントのリソースになる重要な量子状態である．

$$\mathsf{Q} = \frac{1}{(\bar{n}_1+1)(\bar{n}_2+1)-|\bar{m}|^2}\begin{pmatrix} \bar{n}_2+1 & 0 & 0 & \bar{m} \\ 0 & \bar{n}_2+1 & \bar{m}^* & 0 \\ 0 & \bar{m} & \bar{n}_1+1 & 0 \\ \bar{m}^* & 0 & 0 & \bar{n}_1+1 \end{pmatrix}, \quad (5.4.166)$$

$$\mathsf{P} = \frac{1}{\bar{n}_1\bar{n}_2-|\bar{m}|^2}\begin{pmatrix} \bar{n}_2 & 0 & 0 & \bar{m} \\ 0 & \bar{n}_2 & \bar{m}^* & 0 \\ 0 & \bar{m} & \bar{n}_1 & 0 \\ \bar{m}^* & 0 & 0 & \bar{n}_1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.167)$$

最後の結果から明らかなように，2 モード Gauss 状態 ρ が古典的であるための必要条件は不等式 $\bar{n}_1\bar{n}_2 \geq |\bar{m}|^2$ が成り立つことである．一方，2 モード Gauss 状態 ρ が可分であり，エンタングルメントをもたないための必要十分条件 (5.4.153) と (5.4.154) は，パラメータ $\bar{n}_k$ $(k=1,2)$ と $\bar{m}$ を用いて次のような簡単な形に表すことができる [49].

$$\bar{n}_1\bar{n}_2 \geq |\bar{m}|^2. \quad (5.4.168)$$

これは 2 モード Gauss 状態 ρ が古典的であるための条件と一致する．すなわち，特性関数を特徴付ける 4×4 エルミート行列 C が (5.4.161) で与えられるような 2 モード Gauss 状態では，非古典性をもつこととエンタングルメントをもつことは等価である．しかし，このような等価性は任意の 2 モード Gauss 状態に対しては必ずしも成り立つとは限らないことが示されている．

2 つのモードの生成演算子と消滅演算子に対応した複素変数 (z_1, z_2) のかわりに，位置演算子と運動量演算子に対応した 4 つの実変数 (u_1, v_1, u_2, v_2) を用いる場合，2 モード量子状態 ρ の対称順序の特性関数 $C(u_1, v_1, u_2, v_2)$ は次の式で定義される．

$$C(u_1, v_1, u_2, v_2) = \mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{i(u_1q_1+v_1p_1)}\mathrm{e}^{i(u_2q_2+v_2p_2)}\rho]. \quad (5.4.169)$$

ここで，位置演算子 q_k と運動量演算子 p_k は $q_k = (a_k + a_k^\dagger)/\sqrt{2}$，および $p_k = -i(a_k - a_k^\dagger)/\sqrt{2}$ で与えられる．特に，(5.4.161) で特徴付けられる Gauss 状態の場合，この特性関数は次のような形に表すことができる．

$$C(u_1, v_1, u_2, v_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\mathsf{w}\right). \tag{5.4.170}$$

ここで，$\mathsf{w} = (u_1, v_1, u_2, v_2)^{\mathrm{T}}$ であり，4×4 実対称行列 M（強分散行列）は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\mathsf{M} &= \begin{pmatrix} \mathsf{U}^\dagger & 0 \\ 0 & \mathsf{U}^\dagger \end{pmatrix} \mathsf{C} \begin{pmatrix} \mathsf{U} & 0 \\ 0 & \mathsf{U} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{n}_1 + \frac{1}{2} & 0 & -\Re\mathrm{e}\,\bar{m} & -\Im\mathrm{m}\,\bar{m} \\ 0 & \bar{n}_1 + \frac{1}{2} & -\Im\mathrm{m}\,\bar{m} & \Re\mathrm{e}\,\bar{m} \\ -\Re\mathrm{e}\,\bar{m} & -\Im\mathrm{m}\,\bar{m} & \bar{n}_1 + \frac{1}{2} & 0 \\ -\Im\mathrm{m}\,\bar{m} & \Re\mathrm{e}\,\bar{m} & 0 & \bar{n}_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{5.4.171}$$

ここで，2×2 ユニタリ行列 U は次の式で定義される．

$$\mathsf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \tag{5.4.172}$$

次に，強分散行列 M を標準形 M_s *9に変換するために次のように行列 V を導入する．

$$\mathsf{V} = \frac{1}{\sqrt{2|\bar{m}|}}\begin{pmatrix} -\dfrac{\Im\mathrm{m}\,\bar{m}}{\sqrt{|\bar{m}| + \Re\mathrm{e}\,\bar{m}}} & \sqrt{|\bar{m}| + \Re\mathrm{e}\,\bar{m}} \\ \sqrt{|\bar{m}| + \Re\mathrm{e}\,\bar{m}} & \dfrac{\Im\mathrm{m}\,\bar{m}}{\sqrt{|\bar{m}| + \Re\mathrm{e}\,\bar{m}}} \end{pmatrix}. \tag{5.4.174}$$

---

*9　2 モード Gauss 状態の特性関数を特徴付ける強分散行列 M は，局所的なユニタリ変換によって次のような標準形 M_s に変換することができる [50].

$$\mathsf{M}_s = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & -c_2 \\ c_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \qquad (c_1 \geq c_2 \geq 0). \tag{5.4.173}$$

ここで，局所的なユニタリ変換とは，各モードに対するユニタリ行列 U_1 と U_2 を用いて $U_1 \otimes U_2$ の形に表される変換のことである．

このように定義された行列は次の性質を満足する.

$$\mathsf{V}^{\dagger} = \mathsf{V}, \qquad \mathsf{V}^{\dagger}\mathsf{V} = \mathsf{V}\mathsf{V}^{\dagger} = \mathsf{I}. \tag{5.4.175}$$

このとき，標準形 M_s は行列 M から局所的なユニタリ変換によって次のようにして導くことができる.

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_s &= \begin{pmatrix} \mathsf{V} & 0 \\ 0 & \mathsf{V} \end{pmatrix} \mathsf{M} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & 0 \\ 0 & \mathsf{V} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{n}_1 + \frac{1}{2} & 0 & |\bar{m}| & 0 \\ 0 & \bar{n}_1 + \frac{1}{2} & 0 & -|\bar{m}| \\ |\bar{m}| & 0 & \bar{n}_2 + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -|\bar{m}| & 0 & \bar{n}_2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.4.176}$$

強分散行列の標準形 (5.4.176) において，等号 $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 (\equiv \bar{n})$ が成り立つ場合，2 モード Gauss 状態 ρ は対称であるとよばれる．対称な Gauss 状態のエンタングルメントの大きさを定量化するために，次の式で定義されるパラメータ $C_{\bar{m}\bar{n}}$ を導入する.

$$C_{\bar{m}\bar{n}} = \min\left[2\bar{n} - 2|\bar{m}| + 1, 1\right]. \tag{5.4.177}$$

Heisenberg の不確定性関係 $\bar{n}(\bar{n}+1) \geq |\bar{m}|^2$ によってパラメータ $C_{\bar{m}\bar{n}}$ は次の不等式を満足する.

$$0 < C_{\bar{m}\bar{n}} \leq 1. \tag{5.4.178}$$

このように定義されたパラメータ $C_{\bar{m}\bar{n}}$ は，2 量子ビット状態に対するコンカレンスと同様の役割を果たす．パラメータ $C_{\bar{m}\bar{n}}$ を用いると対称な 2 モード Gauss 状態 ρ の "entanglement of formation" $E_F(\rho)$ は次の式で与えられる [51].

$$E_F(\rho) = -\log 2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}}\right) + 1\right] \log\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}}\right) + 1\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}}\right) - 1\right] \log\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}} + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}}\right) - 1\right]. \quad (5.4.179)$$

この表式は対称な Gauss 状態に対してのみ成り立つものである．この式から明らかなように，2 モード Gauss 状態 ρ が可分であり，エンタングルメントが存在しないための必要十分条件は等号 $C_{\bar{m}\bar{n}} = 1$ が成り立つことである．また，(5.4.177) から明らかなように条件 $C_{\bar{m}\bar{n}} = 1$ は次の不等式が成り立つことと等価である．

$$\bar{n} \geq |\bar{m}|. \quad (5.4.180)$$

この不等式は 2 モード Gauss 状態の部分転置の非負性から導かれた条件 (5.4.168) と一致する．

5.4.2 対称 Gauss 状態のエンタングルメントの緩和

初期時刻 $(t=0)$ における 2 モード Gauss 状態の共分散行列が (5.4.176) で与えられる場合を考える．パラメータ $\bar{n}$ と $\bar{m}$ は $\bar{n} = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle = \langle a_2^\dagger a_2 \rangle$ と $\bar{m} = -\langle a_1 a_2 \rangle$ で与えられる．以下では，Gauss 状態にある 2 つのモードが (5.4.142) で定義される量子チャンネルによって時間発展する場合を考える．ただし，各モードに対する外部環境の性質は等しいものと仮定する．すなわち，次の式が成り立つと仮定する．

$$\kappa_1 = \kappa_2 \equiv \kappa, \qquad \bar{n}_{\mathrm{th}\,1} = \bar{n}_{\mathrm{th}\,2} \equiv \bar{n}_{\mathrm{th}}, \qquad \tau_{\mathrm{R}_1} = \tau_{\mathrm{R}_2} \equiv \tau_{\mathrm{R}}, \quad (5.4.181)$$

$$\gamma_{1\,t} = \gamma_{2\,t} \equiv \gamma_t = \exp\left[-\kappa\tau_{\mathrm{R}}\left(\frac{t}{\tau_{\mathrm{R}}} - 1 + \mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}}\right)\right] = \exp[-\kappa\tau_{\mathrm{R}} f(t)]. \quad (5.4.182)$$

量子チャンネルが (5.4.142) で与えられるとき，時刻 t での 2 モード Gauss 状態 $\rho(t)$ の共分散行列は (5.4.176) と同じ形で与えられる．ただし，パラメータ $\bar{n}$ と $\bar{m}$ は次のような時間の関数で置き換えられる．

$$\bar{n} \longrightarrow \bar{n}(t) = \bar{n}_{\text{th}} + (\bar{n} - \bar{n}_{\text{th}})\gamma_t^2, \tag{5.4.183}$$

$$\bar{m} \longrightarrow \bar{m}(t) = \bar{m}\gamma_t^2. \tag{5.4.184}$$

したがって，(5.4.177) で定義されるパラメータ $C_{\bar{m}\bar{n}}$ は時刻 t では次のようになる．

$$C_{\bar{m}\bar{n}}(t) = \min\left[2[\bar{n}_{\text{th}} + (\bar{n} - \bar{n}_{\text{th}})\gamma_t^2] - 2|\bar{m}|\gamma_t^2 + 1, 1\right]. \tag{5.4.185}$$

この結果から，2 モード Gauss 状態 $\rho(t)$ にエンタングルメントが存在するための必要十分条件 ($C_{\bar{m}\bar{n}}(t) < 1$) は次の不等式が成り立つことである．

$$\bar{n}_{\text{th}}(1 - \gamma_t^2) < (|\bar{m}| - \bar{n})\gamma_t^2. \tag{5.4.186}$$

外部環境の温度が絶対ゼロ度 ($\bar{n}_{\text{th}} = 0$) であり，初期時刻の 2 モード Gauss 状態 $\rho(0)$ にエンタングルメントが存在する場合 ($\bar{n} < |\bar{m}|$)，不等式 (5.4.186) は任意の時刻 t で成り立つ．言い換えると，2 モード Gauss 状態のエンタングルメントを有限の時間で完全に壊すためには，熱雑音の存在が必要不可欠である．また，時刻 t での 2 モード Gauss 状態 $\rho(t)$ のエンタングルメントの大きさ $E_F(t)$ は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}
E_F(t) = &-\log 2 \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}}(t) + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}(t)}\right) + 1\right]\log\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}}(t) + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}(t)}\right) + 1\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}}(t) + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}(t)}\right) - 1\right]\log\left[\frac{1}{2}\left(C_{\bar{m}\bar{n}}(t) + \frac{1}{C_{\bar{m}\bar{n}}(t)}\right) - 1\right].
\end{aligned} \tag{5.4.187}$$

"Entanglement of formation" $E_F(t)$ を時間 t の関数としてプロットすると図 5.5 のようになる．この図から明らかなように，熱浴の非 Markov 効果によって 2 モード Gauss 状態のエンタングルメントのディコヒーレンスが抑えられることがわかる．

5.4.3 エンタングルメント破壊チャンネル

最後に，量子マスター方程式 (5.4.136) の解によって決まる量子チャンネル $\mathcal{L}_t$

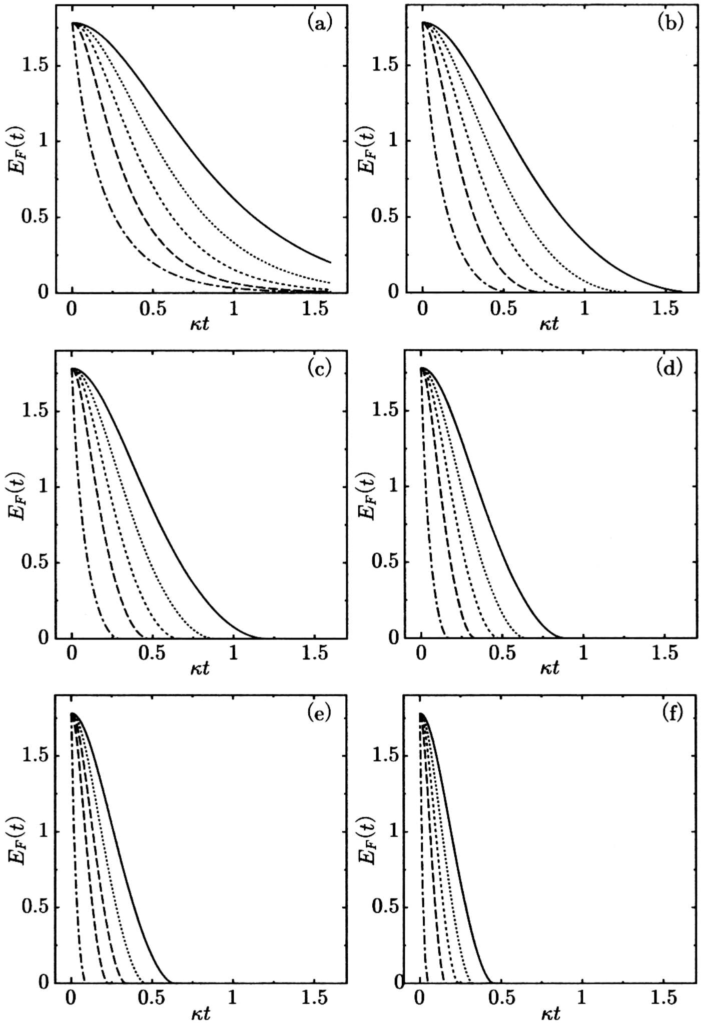


図 5.5 量子チャンネル $\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{L}_t$ によって時間発展した 2 モード Gauss 状態のエンタングルメントの大きさ $E_F(t)$ の時間依存性 [48]. 各グラフにおいて，——は $\kappa\tau_R = 2.0$，……は $\kappa\tau_R = 1.0$，-----は $\kappa\tau_R = 0.5$，– –は $\kappa\tau_R = 0.2$，–·–は $\kappa\tau_R = 0.0$ (Markov 近似に対応) である. また，(a) $(\bar{n}, \bar{m}, \bar{n}_{\rm th}) = (3.0, 3.4, 0.0)$，(b) $(\bar{n}, \bar{m}, \bar{n}_{\rm th}) = (3.0, 3.4, 0.2)$，(c) $(\bar{n}, \bar{m}, \bar{n}_{\rm th}) = (3.0, 3.4, 0.5)$，(d) $(\bar{n}, \bar{m}, \bar{n}_{\rm th}) = (3.0, 3.4, 1.0)$，(e) $(\bar{n}, \bar{m}, \bar{n}_{\rm th}) = (3.0, 3.4, 2.0)$，および (f) $(\bar{n}, \bar{m}, \bar{n}_{\rm th}) = (3.0, 3.4, 4.0)$ である. なお，エンタングルメントの単位は 'ebit' である.

がエンタングルメント破壊チャンネルになるための条件を求めよう．量子ビットの場合と同様に，任意の2モード状態ρに対して，量子状態$(\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})\rho$，または$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}_t)\rho$がエンタングルメントをもたないとき，量子チャンネル$\mathcal{L}_t$はエンタングルメント破壊チャンネルとよばれる．量子チャンネル$\mathcal{L}_t$がエンタングルメント破壊チャンネルになるための必要十分条件は，任意の単一モード状態ρに対して次の関係式を満足する量子状態ρ_kと確率作用素測度M_kが存在することである[40].

$$\mathcal{L}_t \rho = \sum_k \rho_k \mathrm{Tr}(M_k \rho). \tag{5.4.188}$$

ここで，$M_k \geq 0$，$\sum_k M_k = 1$，$\rho_k \geq 0$，$\mathrm{Tr}\,\rho_k = 1$である．パラメータkが連続値をとる場合には和は対応する積分で置き換えられる．時刻tでの量子状態$\mathcal{L}_t \rho$のWigner関数を$W(z;t)$，初期時刻での量子状態ρのWigner関数を$W(z;0)$と表せば，(4.3.126)-(4.3.129)，および(4.3.135)と(4.3.136)から次の式が成り立つ．

$$W(z;t) = \frac{1}{G_t A_t + \frac{1}{2}(1-G_t)} \times \int \frac{d^2 z'}{\pi} \exp\left(- \frac{|z - z'\sqrt{G_t}|^2}{G_t A_t + \frac{1}{2}(1-G_t)} \right) W(z';0). \tag{5.4.189}$$

Gauss積分に対して次の公式が成り立つことに注意しよう．

$$\frac{1}{ab} \int \frac{d^2 z'}{\pi} \mathrm{e}^{-|z-z''|^2/a} \mathrm{e}^{-|z'-z''|^2/b} = \frac{1}{a+b} \mathrm{e}^{-|z-z''|^2/(a+b)}. \tag{5.4.190}$$

ここで，$a, b > 0$である．この公式を用いれば，(5.4.189)を次のように書き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
W(z;t) &= \frac{1}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}(1+G_t)} \\
&\quad \times \int \frac{d^2z'}{\pi} \exp\left(-\frac{|z-z'\sqrt{G_t}|^2}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}(1+G_t)}\right) W(z';0) \\
&= \frac{1}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}} \int \frac{d^2z''}{\pi} \exp\left(-\frac{|z-z''|^2}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \times \frac{2}{G_t} \int \frac{d^2z'}{\pi} \exp\left(-\frac{2|z''-z'\sqrt{G_t}|^2}{G_t}\right) W(z';0) \\
&= \frac{1}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}} \int \frac{d^2z''}{\pi} \exp\left(-\frac{|z-z''\sqrt{G_t}|^2}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \times 2\int \frac{d^2z''}{\pi} \exp\left(-2|z''-z'|^2\right) W(z';0) \\
&= \frac{1}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}} \int \frac{d^2z''}{\pi} \exp\left(-\frac{|z-z''\sqrt{G_t}|^2}{G_t(A_t-1)+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad \times Q(z'';0)
\end{aligned}
\tag{5.4.191}
$$

ここで，$Q(z;0)=\langle z|\rho|z\rangle$ は初期時刻での量子状態 ρ の伏見の Q 関数である．また，パラメータ $\bar{n}_{G_t}$ を次の式で定義する．

$$
\bar{n}_{G_t} = G_t(A_t-1). \tag{5.4.192}
$$

もし，パラメータ $\bar{n}_{G_t}$ が非負ならば，次のような量子状態 ρ_{G_t} を定義することができる．

$$
\rho_{G_t} = \frac{1}{\bar{n}_{G_t}} \int \frac{d^2z}{\pi} \mathrm{e}^{-|z|^2/\bar{n}_{G_t}} |z\rangle\langle z|. \tag{5.4.193}
$$

これは平均光子数が $\bar{n}_{G_t}$ であるような熱平衡状態である．量子状態 ρ_{G_t} の Wigner 関数 $W_{G_t}(z)$ は次の式で与えられる．

$$
W_{G_t}(z) = \frac{1}{\bar{n}_{G_t}+\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{\bar{n}_{G_t}+\frac{1}{2}}\right). \tag{5.4.194}
$$

したがって，(5.4.191) で与えられる Wigner 関数 $W(z;t)$ は次のように表すこと

ができる.

$$W(z;t) = \int \frac{d^2z'}{\pi} W_{G_t}(z - z'\sqrt{G_t})Q(z';0). \tag{5.4.195}$$

この結果は時刻 t での量子状態 $\mathcal{L}_t\rho$ が次の式で与えられることを示している.

$$\mathcal{L}_t\rho = \int \frac{d^2z}{\pi} Q(z;0)D(z\sqrt{G_t})\rho_{G_t}D^\dagger(z\sqrt{G_t})\langle z|\rho|z\rangle. \tag{5.4.196}$$

ここで, $D(z)$ は並進演算子である. そこで, 確率作用素測度 M_z と量子状態 ρ_z を次の式で定義する.

$$M_z = \frac{1}{\pi}|z\rangle\langle z|, \qquad \rho_z = D(z\sqrt{G_t})\rho_{G_t}D^\dagger(z\sqrt{G_t}). \tag{5.4.197}$$

量子状態 ρ_z はコヒーレント振幅をもった熱平衡状態を表し, 演算子 M_z は次の性質を満足する位置と運動量の同時測定を記述する確率作用素測度である.

$$M_z > 0, \qquad \int d^2z\, M_z = 1. \tag{5.4.198}$$

このとき, (5.4.196) は次のように表すことができる.

$$\mathcal{L}_t\rho = \int d^2z\, \rho_z \mathrm{Tr}(M_z\rho(0)). \tag{5.4.199}$$

この結果は (5.4.188) の連続版に他ならない. したがって, 不等式 $\bar{n}_{G_t} \geq 0$ が成り立つ場合, 量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ はエンタングルメント破壊チャンネルになる. パラメータ $\bar{n}_{G_t}$ の定義から明らかなように, 不等式 $\bar{n}_{G_t} \geq 0$ はパラメータ A_t に対する次の不等式と等価である.

$$A_t \geq 1. \tag{5.4.200}$$

すなわち, 量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ における単位利得当たりの平均雑音光子数が 1 以上になるとき, この量子チャンネルにおいては量子状態のエンタングルメントは存在し得ない.

第6章

量子通信への応用

量子通信とは，量子力学の原理を利用した情報伝送方法の総称である [52]．従来の情報通信の物理的な基礎は主に古典電磁気学（Maxwell（マクスウェル）電磁気学）であり，情報理論的な基礎は Shannon（シャノン）理論である [53]．量子通信では，量子状態のエンタングルメントや量子測定による波束の収縮などを巧みに利用して情報伝送を行う．量子通信の研究は，古典物理学に従うハードウェアを前提にした Shannon 理論を量子力学に従うハードウェアに対応するように拡張する研究と，量子力学を利用した従来とはまったく異なる手法による情報伝送手段の研究に分けることができる．前者は，Shannon 理論における通信路符号化定理をさまざまな観点から量子力学的に拡張し，量子符号理論の定式化を目指す研究である．後者は，量子テレポーテーションや量子デンスコーディングに代表される量子状態のエンタングルメントを利用したまったく新しい情報伝送手段の研究である．特に，量子テレポーテーションは量子ネットワークや量子コンピュータにおいても重要な役割を果たす量子情報処理の要素技術であると考えられている．

本章では，情報の担い手として量子ビットと調和振動子を用いる場合の量子テレポーテーションと量子デンスコーディングの基本的な考え方を紹介し，前節で得られた結果を用いて，外部環境がこれらの量子通信の情報伝送特性に及ぼす影響を議論する．

6.1 量子テレポーテーション

6.1.1 量子テレポーテーションとは

量子テレポーテーション（quantum teleportation）は未知の量子状態をその状態自体を直接送ることなく，エンタングルメントを利用した古典通信によって伝送

する方法である [54]．当然，既知の量子状態も量子テレポーテーションによって伝送することができるが，量子状態がわかっていれば量子テレポーテーションを用いるまでもなく，古典通信のみで伝送することができる．たとえば，量子状態が既知の場合には，その量子状態の生成方法の詳細を書いた文章を郵便で送ればよい．郵便を受け取った者がそこに書かれている方法に従えば，適当な装置を用いて量子状態を得ることが原理的に可能である．

まず，量子ビットを用いて量子テレポーテーションの原理について説明しよう．量子ビットの任意の純粋状態 $|\psi\rangle$ は次のような形に表すことができる．

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \tag{6.1.1}$$

ここで，α と β は規格化条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満足する複素数である．また，$|0\rangle$ と $|1\rangle$ は 2 次元 Hilbert 空間の適当な基底ベクトルである．量子テレポーテーションの目的は，(6.1.1) で与えられる送信者サイドにある量子状態を，この量子ビット自体を直接送ることなく，(6.1.1) と同じ量子状態を受信者サイドに再現することである．一般には送信者はパラメータ α と β の値は知らない．もし，これらの値を知っていれば，それを古典通信で受信者に知らせれば，受信者サイドで量子状態 (6.1.1) を再現することができる．送信者がパラメータ α と β の値を知らない場合，不確定性関係によってパラメータ α と β の値は正確に決定することはできないので，量子状態 (6.1.1) を受信者サイドで再現するためには何らかの工夫が必要である．

そこで，送信者と受信者は送信すべき量子状態 $|\psi\rangle$ 以外に Bell 状態，たとえば $|\Phi_+\rangle = (|0\ 0\rangle + |1\ 1\rangle)/\sqrt{2}$ にある 2 個の量子ビットを 1 つずつ保持している場合を考えよう．このとき，システム全体は 3 個の量子ビットから成り，次のような量子状態で与えられる．

$$|\Upsilon\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi_+\rangle. \tag{6.1.2}$$

送信者サイドには量子状態 $|\psi\rangle$ にある量子ビットと Bell 状態の片割れの量子ビットの計 2 個の量子ビットが存在する．送信者サイドにある 2 個の量子ビットは 4 次元 Hilbert 空間によって記述されるので，これを 4 つの Bell 状態 $|\Phi_\pm\rangle$ と $|\Psi_\pm\rangle$ を用いて展開することができる．その結果，(6.1.2) は次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
|\Upsilon\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\otimes(|0\ 0\rangle+|1\ 1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}|\Phi_+\rangle\otimes(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+\frac{1}{2}|\Phi_-\rangle\otimes(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle) \\
&\quad +\frac{1}{2}|\Psi_+\rangle\otimes(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)+\frac{1}{2}|\Psi_-\rangle\otimes(\alpha|1\rangle-\beta|0\rangle). \qquad (6.1.3)
\end{aligned}
$$

送信者は自分が保持している2個の量子ビットから成るシステムに対して，Bell測定を行う．Bell測定とは2個の量子ビットの量子状態が4つのBell状態のいずれであるかを判定する測定である．あるいは，4つのBell状態を固有状態にもつような物理量の測定である．このような測定の例としては，物理量 $\sigma^z\otimes\sigma^z$ と $\sigma^x\otimes\sigma^x$ の同時測定があげられる．4つのBell状態が $\sigma^z\otimes\sigma^z$ と $\sigma^x\otimes\sigma^x$ の同時固有状態であることは容易に確かめることができる．

送信者がBell測定を行うと，確率 $\frac{1}{4}$ で4つのBell状態のいずれかが得られる[*1]．測定結果自体や特定の測定結果が得られる確率は量子ビット状態 $|\psi\rangle$ にはまったく依存しないので，送信者はBell測定によって自分が送ろうとしている量子ビット状態 $|\psi\rangle$ に関するいかなる情報も得ることはできない．Bell測定を行った後のシステム全体の量子状態は測定結果に依存して次のようになる．

測定結果		測定後のシステムの量子状態
$\|\Phi_+\rangle$	$\longrightarrow$	$\|\Phi_+\rangle\otimes(\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle)$
$\|\Phi_-\rangle$	$\longrightarrow$	$\|\Phi_-\rangle\otimes(\alpha\|0\rangle-\beta\|1\rangle)$
$\|\Psi_+\rangle$	$\longrightarrow$	$\|\Psi_+\rangle\otimes(\alpha\|1\rangle+\beta\|0\rangle)$
$\|\Psi_-\rangle$	$\longrightarrow$	$\|\Phi_-\rangle\otimes(\alpha\|1\rangle-\beta\|0\rangle)$

測定後のシステムでは送信者の量子ビットと受信者の量子ビットの間にはいかなる相関も存在しない．したがって，以下では受信者の1量子ビット状態についてのみ

---

*1　たとえば，測定結果としてBell状態 $|\Phi_+\rangle$ が得られる確率 $P(\Phi_+)$ は次のようにして計算することができる．

$$
P(\Phi_+)=\langle\Phi_+|\left(\mathrm{Tr}_{受信者}|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|\right)|\Phi_+\rangle=\frac{1}{4}
$$

ここで，$\mathrm{Tr}_{受信者}$ は受信者が保持している量子ビットに関してトレースをとることを意味する．他のBell状態 $|\Phi_-\rangle,|\Psi_+\rangle,|\Psi_-\rangle$ が得られる確率も同様にして計算すると，$P(\Phi_\pm)=P(\Psi_\pm)=1/4$ が得られる．

考えることができる．送信者が測定を行った後では，受信者の量子ビットは4つの量子状態 $\alpha|0\rangle \pm \beta|1\rangle, \alpha|1\rangle \pm \beta|0\rangle$ のいずれかである．

次に，送信者はBell測定の結果を古典通信によって受信者に伝える．Bell測定の結果は等確率で得られる4つの事象のうちの1つなので，古典通信で送られる情報量は2ビットである．ただし，古典通信には量子ビット状態 $|\psi\rangle$ に関する情報は含まれていない．一方，受信者は送信者から知らされたBell測定の結果に従って次のようなユニタリ変換を自分が保持している量子ビットに対して行う．

測定結果	ユニタリ変換
$\|\Phi_+\rangle$	I
$\|\Phi_-\rangle$	σ_z
$\|\Psi_+\rangle$	σ^x
$\|\Psi_-\rangle$	$\sigma^z\sigma^x$

このとき，次の式が成り立つ．

$$I(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = |\psi\rangle, \tag{6.1.4}$$

$$\sigma^z(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) = |\psi\rangle, \tag{6.1.5}$$

$$\sigma^x(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) = |\psi\rangle, \tag{6.1.6}$$

$$\sigma^z\sigma^x(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) = |\psi\rangle. \tag{6.1.7}$$

ここで，$|\psi\rangle$ は (6.1.1) で表される送信者が送ろうとしていた量子状態である．したがって，いずれの場合も受信者が保持している量子ビットの状態は $|\psi\rangle$ になる．受信者はBell測定の結果は知っているが，最終的に自分が得た量子状態に関してはいかなる情報も知り得ない．送信者はBell測定の結果を受信者に知らせる古典通信と受信者とあらかじめ共有したエンタングルメントを用いて，未知の量子状態を伝送することができた．これが量子テレポーテーションの概要である．以上では量子ビットの純粋状態の理想的な量子テレポーテーションを説明したが，混合状態や一般の N 次元空間上で定義される量子状態のテレポーテーションもまったく同様にして行うことができる．

送信者と受信者が完全なエンタングルメントを共有しているとき，送信者が送ろうとした量子状態と受信者が実際に得た量子状態は完全に一致する．また，2つの量子状態が完全に一致するとき，送信者も受信者もその量子状態に関していかなる

情報も得ることはない．これは量子力学の基本原理からの必然的な帰着である．また，Bell 測定を行った受信者のところには元の量子状態の痕跡もいっさい残らない．量子状態に関するいかなる情報も送信者から受信者に伝えられないにもかかわらず，受信者がその量子状態を得ることができるのは，エンタングルメントとよばれる非局所的量子相関のおかげである．しかし，送信者と受信者が共有するエンタングルメントが不完全であれば，状況は異なる．送信者が送ろうとした量子状態を $\rho_{\rm in}$，量子テレポーテーションを行った結果として受信者が実際に得ることができる量子状態を $\rho_{\rm out}$ と表せば，一般には $\rho_{\rm in} \neq \rho_{\rm out}$ である．量子テレポーテーションの性能は 2 つの量子状態 $\rho_{\rm in}$ と $\rho_{\rm out}$ がどの程度一致しているかによって評価される．一般に，2 つの量子状態 ρ_1 と ρ_2 がどの程度一致しているかは，次の式で定義される忠実度とよばれるパラメータ $F(\rho_1, \rho_2)$ によって定量化することができる [52].

$$F(\rho_1, \rho_2) = [\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1})^{1/2}]^2. \tag{6.1.8}$$

忠実度 $F(\rho_1, \rho_2)$ は 2 つの量子状態に関して対称 $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$ であり，一方の量子状態が純粋状態（たとえば，$\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$）ならば，次のようになる．

$$F(\rho_1, \rho_2) = \langle\psi_2|\rho_1|\psi_2\rangle. \tag{6.1.9}$$

量子状態 ρ_1 と ρ_2 が完全に一致する場合にのみ忠実度は最大値 $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ をとる．また，2 つの量子状態 ρ_1 と ρ_2 が定義される Hilbert 空間（サポート空間）が互いに直交する場合に忠実度は最小値 $F(\rho_1, \rho_2) = 0$ をとる．一方，量子テレポーテーションは量子状態 $\rho_{\rm in}$ から量子状態 $\rho_{\rm out}$ への写像 $\mathcal{K}(\rho_{\rm out} = \mathcal{K}\rho_{\rm in})$ と考えることができる．このような写像は一般に量子チャンネルとよばれる．量子テレポーテーションを表す量子チャンネル $\mathcal{K}$ は送信者と受信者が共有するエンタングルメント，送信者が行う量子測定，受信者が行う量子操作に依存する．完全なエンタングルメントを用いた理想的な量子テレポーテーションの場合にのみ，量子チャンネル $\mathcal{K}$ は恒等写像になり得る．

6.1.2 量子テレポーテーションと等価な量子チャンネル

N 次元 Hilbert 空間上で定義される任意の量子状態 $\rho_{\rm in}$ を量子テレポーテーションによって伝送した場合に，受信者が平均として得ることができる量子状態を

$\rho_{\rm out}$ と表し，2つの量子状態の間の入力・出力関係 $\rho_{\rm out}=\mathcal{K}\rho_{\rm in}$ を求めよう [55]．理想的な量子テレポーテーションが可能な場合には等号 $\rho_{\rm out}=\rho_{\rm in}(\mathcal{K}=\mathcal{I})$ が成り立つことは明らかである．送信者と受信者は量子テレポーテーションを行うために，$N\times N$ 次元 Hilbert 空間の任意の量子状態 W を共有する場合を考える．この量子状態が完全なエンタングルメントをもつ理想的な場合には次の式で与えられる．

$$W=|\Phi\rangle\langle\Phi|, \qquad |\Phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|k\rangle\otimes|k\rangle. \tag{6.1.10}$$

ここで，$\{|k\rangle\,|\,k=0,1,\ldots,N-1\}$ は N 次元 Hilbert 空間の適当な基底ベクトルである．送信者は量子状態 $\rho_{\rm in}$ にあるシステムと量子状態 W にある2つのシステムのうちの1つを保持し，受信者は量子状態 W にあるもう1つのシステムを保持している．送信者は自分が保持している2つのシステムに対して一般化された Bell 測定を行うものとする．

議論を進める前に，一般化された Bell 測定について説明しておこう．まず，N 次元 Hilbert 空間上で定義される N^2 個のユニタリ演算子 U_{jk} $(j,k=0,1,\ldots,N-1)$ を次の式で導入する．

$$U_{jk}=\sum_{l=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i(2\pi j/N)l}|l\rangle\langle k+l|. \tag{6.1.11}$$

ここで，$|l\rangle$ は N 次元 Hilbert 空間の基底ベクトルである．以下では，ベクトル $|k+l\rangle$ に現れる和は $(k+l)\bmod N$ を解釈するものとする．たとえば，$|k+N\rangle=|k\rangle$ である．また，次の関係式が成り立つことは容易に確かめることができる．

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\mathrm{e}^{i(2\pi j/N)(l-m)}=\begin{cases}1 & (j=k \bmod N),\\ 0 & (j\neq k \bmod N).\end{cases} \tag{6.1.12}$$

これらのことからユニタリ演算子 U_{jk} が次の2つの関係式を満足することがわかる．

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} U_{jk} X U_{jk}^{\dagger} = (\mathrm{Tr}X)1, \tag{6.1.13}$$

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(U_{jk}^{\dagger} U_{lm}) = \delta_{jl}\delta_{km}. \tag{6.1.14}$$

ここで，1 は単位演算子であり，X は N 次元 Hilbert 空間上で定義される任意の演算子である．特に，$N=2$ の場合には，4 つのユニタリ演算子 U_{jk} は次のようになる．

$$U_{jk} = \begin{cases} 1 & (j=0, k=0), \\ \sigma^x & (j=0, k=1), \\ \sigma^z & (j=1, k=0), \\ i\sigma^y = \sigma^z\sigma^z & (j=1, k=1). \end{cases} \tag{6.1.15}$$

ここで，$\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ は通常の Pauli 行列である．この式はひとまとめにして，$U_{jk} = (\sigma^z)^j(\sigma^x)^k$ と表すことができる．このことから (6.1.11) で定義されるユニタリ演算子 U_{jk} は一般化された Pauli 行列とよばれることがある．

次に，(6.1.10) で定義される $N\times N$ 次元 Hilbert 空間の完全なエンタングルメントをもつ状態ベクトル $|\Phi\rangle$ にユニタリ演算子 U_{jk} を作用させて，N^2 個の完全なエンタングルメントをもつ状態ベクトル $|\Phi_{jk}\rangle$ をつくる．

$$\begin{aligned} |\Phi_{jk}\rangle &= (1\otimes U_{jk})|\Phi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{N-1} |l\rangle\otimes U_{jk}|l\rangle. \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

ユニタリ演算子 U_{jk} の性質 (6.1.13) と (6.1.14) から，N^2 個のベクトル集合 $\{|\Phi_{jk}\rangle \,|\, j,k=0,1,2,\ldots,N-1\}$ は $N\times N$ 次元 Hilbert 空間の完全正規直交系になることがわかる．すなわち，次の関係式が成り立つ．

$$\langle\Phi_{jk}|\Phi_{lm}\rangle = \delta_{jl}\delta_{km}, \tag{6.1.17}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}|\Phi_{jk}\rangle\langle\Phi_{jk}| = 1. \tag{6.1.18}$$

特に，$N=2$ の場合には，状態ベクトル $|\Phi_{jk}\rangle$ は次のようになる．

$$|\Phi_{jk}\rangle = \begin{cases} |\Phi_+\rangle & (j=0, k=0), \\ |\Psi_+\rangle & (j=0, k=1), \\ |\Phi_-\rangle & (j=1, k=0), \\ -|\Psi_-\rangle & (j=1, k=1). \end{cases} \tag{6.1.19}$$

ここで，$|\Phi_\pm\rangle$ と $|\Psi_\pm\rangle$ は Bell 状態である．このために，状態ベクトル $|\Phi_{jk}\rangle$ は**一般化された Bell 状態**とよばれる．通常の Bell 測定は，2 個の量子ビットの状態が 4 つの Bell 状態のうちのいずれであるかを判定する測定であり，射影演算子 $P_X = |X\rangle\langle X|(X=\Phi_\pm, \Psi_\pm)$ で記述される．これと同様に，一般化された Bell 測定とは，N 次元 Hilbert 空間で記述される 2 つのシステムが N^2 個の一般化された Bell 状態のいずれであるか判定する測定であり，次のような射影演算子 Π_{jk} で記述される．

$$\Pi_{jk} = |\Phi_{jk}\rangle\langle\Phi_{jk}| \qquad (j,k=0,1,\ldots,N-1) \tag{6.1.20}$$

状態ベクトル $|\Phi_{jk}\rangle$ の完全性関係から等号 $\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\Pi_{jk}=1$ が満たされる．

送信者と受信者が $N\times N$ 次元 Hilbert 空間上で定義される任意の量子状態 W を共有して，N 次元 Hilbert 空間上で定義される任意の量子状態 $\rho_{\rm in}$ を量子テレポーテーションによって伝送する場合を考える．量子状態 W は $N\times N$ 次元 Hilbert 空間の完全正規直交系 $\{|\Phi_{jk}\rangle\,|\,j,k=0,1,\ldots,N-1\}$ を用いて次のように展開することができる．

$$W = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} F_W(j,k;l,m)|\Phi_{jk}\rangle\langle\Phi_{lm}|, \tag{6.1.21}$$

$$F_W(j,k;l,m) = \langle\Phi_{jk}|W|\Phi_{lm}\rangle. \tag{6.1.22}$$

送信者は量子状態 W にある 1 つのシステムと量子状態 ρ_{in} にあるシステムに対して一般化された Bell 測定を行う．そして，一般化された Bell 状態 $|\Psi_{jk}\rangle$ が測定結果として得られた場合，送信者と受信者のシステム全体の量子状態は次のように変化する．

$$\rho_{\text{in}} \otimes W \longrightarrow \frac{(\Pi_{jk} \otimes 1)(\rho_{\text{in}} \otimes W)(\Pi_{jk} \otimes 1)}{\mathrm{Tr}[(\Pi_{jk} \otimes 1)(\rho_{\text{in}} \otimes W)]}. \tag{6.1.23}$$

ここで，1 は受信者が保持するシステムの Hilbert 空間の単位演算子であり，Tr はシステム全体に関してトレースをとる操作を表す．また，一般化された Bell 状態 $|\Phi_{jk}\rangle$ が測定結果として得られる確率 P_{jk} は次の式で与えられる．

$$P_{jk} = \mathrm{Tr}[(\Pi_{jk} \otimes 1)(\rho_{\text{in}} \otimes W)]. \tag{6.1.24}$$

また，受信者のシステムのみの量子状態 ρ_{jk} は次の式で与えられる．

$$\rho_{jk} = \frac{\mathrm{Tr}_{\text{送信者}}[(\Pi_{jk} \otimes 1)(\rho_{\text{in}} \otimes W)]}{\mathrm{Tr}[(\Pi_{jk} \otimes 1)(\rho_{\text{in}} \otimes W)]}. \tag{6.1.25}$$

ここで，$\mathrm{Tr}_{\text{送信者}}$ は送信者が保持している 2 つのシステムに関してトレースをとる操作を表す．送信者は測定結果を古典通信によって受信者に伝える．受信者は測定結果 $|\Phi_{jk}\rangle$ に対応して，自分が保持しているシステムに対して一般化された Pauli 行列 U_{jk} を用いて，ユニタリ変換を行う．このとき，受信者のシステムの量子状態は次のようになる．

$$\rho_{jk} = \frac{U_{jk}\left\{\mathrm{Tr}_{\text{送信者}}[(|\Phi_{jk}\rangle\langle\Phi_{jk}| \otimes 1)(\rho_{\text{in}} \otimes W)]\right\}U_{jk}^{\dagger}}{\mathrm{Tr}[(|\Phi_{jk}\rangle\langle\Phi_{jk}| \otimes 1)(\rho_{\text{in}} \otimes W)]}. \tag{6.1.26}$$

受信者はこの量子状態を確率 P_{jk} で得ることになるので，平均としての受信者の量子状態 ρ_{out} は次の式で与えられる．

$$\rho_{\rm out} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} P_{jk}\rho_{jk}. \tag{6.1.27}$$

この式の右辺を計算すれば，量子テレポーテーションと等価な量子チャンネル $\mathcal{K}$ ($\rho_{\rm out} = \mathcal{K}\rho_{\rm in}$) を求めることができる．

量子チャンネル $\mathcal{K}$ を求めるために，(6.1.27) の右辺に，(6.1.11),(6.1.21), (6.1.24)，および (6.1.26) を代入して，具体的に計算を実行すれば，最終的に次の結果が得られる [55].

$$\begin{aligned}\rho_{\rm out} &= \mathcal{K}\rho_{\rm in} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} W_{jk} U_{j-k} \rho_{\rm in} U_{j-k}^{\dagger}.\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

ここで，$W_{jk} = \langle \Phi_{jk}|W|\Phi_{jk}\rangle$ である．特に，量子ビット状態のテレポーテーションの場合には次のようになる．

$$\rho_{\rm out} = W_{\Phi_+}\rho_{\rm in} + W_{\Psi_+}\sigma^x\rho_{\rm in}\sigma^x + W_{\Psi_-}\sigma^y\rho_{\rm in}\sigma^y + W_{\Phi_-}\sigma^z\rho_{\rm in}\sigma^z, \tag{6.1.29}$$

$$W_{\Phi_+} = \langle \Phi_+|W|\Phi_+\rangle, \qquad W_{\Psi_+} = \langle \Psi_+|W|\Psi_+\rangle, \tag{6.1.30}$$

$$W_{\Psi_-} = \langle \Psi_-|W|\Psi_-\rangle, \qquad W_{\Phi_-} = \langle \Phi_-|W|\Phi_-\rangle. \tag{6.1.31}$$

このような量子チャンネルは Pauli チャンネルとよばれる．したがって，一般に N 次元 Hilbert 空間上で定義される量子状態のテレポーテーションは一般化された **Pauli** チャンネルとよばれる．

ところで，任意の 2 量子ビット状態 W は Pauli 行列を用いて次の形に表すことができる．

$$\begin{aligned}W = \frac{1}{4}\Bigg[& 1\otimes 1 + \sum_{j\in\{x,y,z\}} A_j(\sigma^j\otimes 1) + \sum_{j\in\{x,y,z\}} B_j(1\otimes\sigma^j) \\ & + \sum_{j\in\{x,y,z\}}\sum_{k\in\{x,y,z\}} C_{jk}(\sigma^j\otimes\sigma^k)\Bigg].\end{aligned} \tag{6.1.32}$$

このとき，(6.1.30) と (6.1.31) は展開係数 C_{jk} を用いて次のように表すことがで

きる．

$$W_{\Phi_+} = \frac{1}{4}(1 + C_{xx} - C_{yy} + C_{zz}), \tag{6.1.33}$$

$$W_{\Phi_-} = \frac{1}{4}(1 - C_{xx} + C_{yy} + C_{zz}), \tag{6.1.34}$$

$$W_{\Psi_+} = \frac{1}{4}(1 + C_{xx} + C_{yy} - C_{zz}), \tag{6.1.35}$$

$$W_{\Psi_-} = \frac{1}{4}(1 - C_{xx} - C_{yy} - C_{zz}). \tag{6.1.36}$$

また，伝送すべき量子ビット状態 $\rho_{\rm in}$ は次の形に表すことができる．

$$\rho_{\rm in} = \frac{1}{2}(1 + a_x\sigma^x + a_y\sigma^y + a_z\sigma^z). \tag{6.1.37}$$

ここで，条件 $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \leq 1$ を満足する実ベクトル (a_x, a_y, a_z) は Bloch ベクトルである．(6.1.32) と (6.1.37) を用いれば，量子テレポーテーションによって伝送されたとき，次のような量子状態になる．

$$\rho_{\rm out} = \frac{1}{2}(1 + C_{xx}a_x\sigma^x - C_{yy}a_y\sigma^y + C_{zz}a_z\sigma^z). \tag{6.1.38}$$

したがって，量子ビット状態のテレポーテーションは Bloch ベクトルに対する次のような線形変換と等価である．

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \tag{6.1.39}$$

以上では，送信者は一般化された Bell 測定を行い，受信者は一般化された Pauli 行列を用いたユニタリ変換を行う場合を考えた．これは標準的なプロトコルに従う量子テレポーテーションとよばれる．しかし，標準的プロトコルは必ずしも最適な量子テレポーテーションを実現するとは限らない．最適な量子テレポーテーションを実現するために，送信者が行うべき最適な量子測定と受信者が行うべき最適な量子状態の変換を求めることが必要である．

6.1.3 外部環境の影響下での量子テレポーテーション

送信者と受信者の間でエンタングルメントを共有する方法はいろいろと考えられるが，以下では送信者サイドで Bell 状態 $|\Phi_+\rangle$ を準備し，2 個の量子ビットのうちの 1 つを受信者に送ることによってエンタングルメントを共有する場合を考える．量子ビットを受信者に送る場合，外部環境の影響を受けるものと仮定する．この外部環境の影響を量子チャンネル $\mathcal{L}$ で表せば，送信者と受信者が共有する量子状態 W は次の式で与えられる．

$$W = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{I})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|. \tag{6.1.40}$$

量子状態 W の具体的な表式は 5.2 節や 5.3 節で求められているので，その結果を用いて量子テレポーテーションの性質を調べることができる．

まず，外部環境の影響が (4.1.63)-(4.1.66) で定義される非 Markov 量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ で記述される場合を考えよう [56]．このとき，送信者と受信者が共有する量子状態 W は (5.2.23) で与えられる．

$$\begin{aligned} W = &\frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\ &+ \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|) \\ &+ \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|) \\ &+ \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|). \end{aligned} \tag{6.1.41}$$

ここで，パラメータ γ_t は (4.1.62) で定義される．このエンタングルメントを用いて任意の量子ビット状態 $\rho_{\rm in}$ を量子テレポーテーションによって伝送するとき，受信者が得ることができる量子状態 $\rho_{\rm out}$ は (6.1.29)-(6.1.31) から次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} \rho_{\rm out} = &\frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2\rho_{\rm in} + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\sigma^x\rho_{\rm in}\sigma^x \\ &+ \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\sigma^y\rho_{\rm in}\sigma^y + \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2\sigma^z\rho_{\rm in}\sigma^z. \end{aligned} \tag{6.1.42}$$

あるいは，量子状態 $\rho_{\rm in}$ の Bloch ベクトルを (a_x, a_y, a_z) とすれば，量子状態 $\rho_{\rm out}$ は次のように表すことができる．

$$\rho_{\rm out} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_t a_x \sigma^x + \gamma_t a_y \sigma^y + \gamma_t^2 a_z \sigma^z). \tag{6.1.43}$$

量子テレポーテーションの性能を調べるために，受信者が受け取った量子状態 $\rho_{\rm out}$ が元の量子状態 $\rho_{\rm in}$ にどれだけ近いかを忠実度 (6.1.9) を用いて評価しよう．そこで，2×2 行列 $\sqrt{\rho_{\rm in}}\rho_{\rm out}\sqrt{\rho_{\rm in}}$ の固有値を λ_1, λ_2 と表せば，忠実度 $F(\rho_{\rm in}, \rho_{\rm out})$ は次の式のようにして計算することができる．

$$\begin{aligned} F(\rho_{\rm in}, \rho_{\rm out}) &= (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})^2 \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ &= {\rm Tr}\,(\sqrt{\rho_{\rm in}}\rho_{\rm out}\sqrt{\rho_{\rm in}}) + 2\sqrt{\det\,(\sqrt{\rho_{\rm in}}\rho_{\rm out}\sqrt{\rho_{\rm in}})} \\ &= {\rm Tr}(\rho_{\rm in}\rho_{\rm out}) + 2\sqrt{\det \rho_{\rm in} \det \rho_{\rm out}}. \end{aligned} \tag{6.1.44}$$

ここで，行列の固有値の和はその行列のトレースに等しく，固有値の積がその行列の行列式に等しいことを用いた．あるいは，量子状態 $\rho_{\rm in}$ と $\rho_{\rm out}$ の Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}_{\rm in}$ と $\boldsymbol{a}_{\rm out}$ を用いれば，次の式が得られる．

$$F(\rho_{\rm in}, \rho_{\rm out}) = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{a}_{\rm in}\cdot \boldsymbol{a}_{\rm out}) + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - |\boldsymbol{a}_{\rm in}|^2)(1 - |\boldsymbol{a}_{\rm out}|^2)}. \tag{6.1.45}$$

ここで，Bloch ベクトル $\boldsymbol{a}_{\rm in}$ と $\boldsymbol{a}_{\rm out}$ は次の関係式で結ばれる．

$$\boldsymbol{a}_{\rm out} = \mathsf{L}_t \boldsymbol{a}_{\rm in}, \qquad \mathsf{L}_t = \begin{pmatrix} \gamma_t & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_t & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_t^2 \end{pmatrix}. \tag{6.1.46}$$

送信者サイドの量子状態 $\rho_{\rm in}$ が純粋状態の場合には等号 $|\boldsymbol{a}_{\rm in}| = 1$ が成り立つので，量子テレポーテーションによって伝送された量子状態と元の量子状態の忠実度は次のようになる．

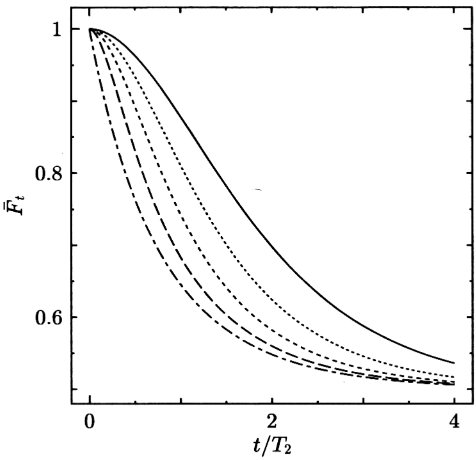


図 6.1 非 Markov 量子チャンネルの影響下で行われる量子テレポーテーションにおける量子状態の忠実度 $\bar{F}_t$ の時間依存性 [56]．——は $\tau_{\rm R}/T_2 = 2.0$，┈┈は $\tau_{\rm R}/T_2 = 1.0$，-----は $\tau_{\rm R}/T_2 = 0.5$，– –は $\tau_{\rm R}/T_2 = 0.2$，– - –は $\tau_R/T_2 = 0.0$（Markov 近似に対応）である．

$$F(\rho_{\rm in}, \rho_{\rm out}) = \frac{1}{2}(1+\gamma_t) - \frac{1}{2}\gamma_t(1-\gamma_t)|a_{\rm in}^z|^2. \tag{6.1.47}$$

一般に量子テレポーテーションによって送るべき量子状態 $\rho_{\rm in}$ は未知なので，この結果をすべての可能な純粋量子ビット状態に関して等しい重みで平均すると，次の結果が得られる．

$$\bar{F}(\rho_{\rm in}, \rho_{\rm out}) = \frac{1}{6}(3+2\gamma_t+\gamma_t^2). \tag{6.1.48}$$

ここで，$\overline{|a_{\rm in}^z|^2} = \frac{1}{3}$ であることを用いた．忠実度の平均値 $\bar{F}(\rho_{\rm in}, \rho_{\rm out})$ の時間依存性をプロットすると図 6.1 のようになる．量子ビット状態のテレポーテーションの場合，量子状態のエンタングルメントを利用しない“古典的な”テレポーテーションで達成可能な忠実度の上限は $\frac{2}{3}$ である．したがって，量子テレポーテーションが有効に機能するのは，不等式 $\bar{F}(\rho_{\rm in}, \rho_{\rm out}) > \frac{2}{3}$ が成り立つ場合である．この条件は次の不等式と等価である．

$$\gamma_t > \sqrt{2} - 1. \tag{6.1.49}$$

すなわち，送信者と受信者が量子テレポーテーションを行うために量子状態 W を共有する際に，外部環境の影響が条件 (6.1.49) を満足すれば，量子テレポーテーションが有効に機能する．以上では，外部環境の影響が (4.1.63)-(4.1.66) で定義される量子チャンネルで記述される場合を扱ったが，その他の場合にも同様に議論することができる．

6.2 量子デンスコーディング

6.2.1 量子デンスコーディングとは

量子テレポーテーションと同じように量子状態のエンタングルメントを用いた情報伝送方法である**量子デンスコーディング**（quantum dense coding）について考えよう [57]．量子テレポーテーションは古典チャンネル（古典情報の伝送）と量子状態のエンタングルメントを用いた量子状態の伝送方法であるが，量子デンスコーディングは量子チャンネル（量子状態の伝送）と量子状態のエンタングルメントを用いた古典情報の伝送方法である．古典情報とは，たとえば 00101011101 ⋯ のようなビット列で表現できるメッセージである．古典情報伝送に関する量子通信路符号化定理によれば，1 個の量子ビット，すなわち 2 次元 Hilbert 空間で記述される量子系を用いて伝送することができる古典情報の原理的な上限は 1 ビットである．しかし，量子状態のエンタングルメントの助けを借りることによって，1 個の量子ビットを用いて最大で 2 ビットの古典情報を伝送することができる．

まず，完全なエンタングルメントをもつ Bell 状態を用いた理想的な量子デンスコーディングを考えよう．送信者と受信者はあらかじめ 4 つの Bell 状態の 1 つ，たとえば $|\Phi_+\rangle$ を共有するものと仮定する．また，送信者が受信者に送りたい 2 ビットの古典情報をビット列 $\{00, 01, 10, 11\}$ によって表すことにする．送信者は自分が送りたいビット列に対応して，次の表のような 4 つのユニタリ変換を準備する．

ビット列	ユニタリ変換
00	1
01	σ^x
10	$i\sigma^y$
11	σ^z

送信者はこの表に従って自分が保持している量子ビットに対してユニタリ変換を行う．このとき，送信者が送りたいビット列に対応して送信者と受信者が共有している量子状態は次のようになる．

$$00 \longrightarrow (1 \otimes 1)|\Phi_+\rangle \quad = |\Phi_+\rangle, \tag{6.2.50}$$

$$01 \longrightarrow (\sigma^x \otimes 1)|\Phi_+\rangle = |\Psi_+\rangle, \tag{6.2.51}$$

$$10 \longrightarrow (i\sigma^y \otimes 1)|\Phi_+\rangle = |\Psi_-\rangle, \tag{6.2.52}$$

$$11 \longrightarrow (\sigma^z \otimes 1)|\Phi_+\rangle = |\Phi_-\rangle. \tag{6.2.53}$$

ユニタリ変換を行った後の量子ビットを量子チャンネルを用いて受信者に送る．量子チャンネルが損失や雑音のない理想的なものであれば，受信者が得る 2 量子ビット状態は 4 つの Bell 状態 $|\Phi_\pm\rangle, |\Psi_\pm\rangle$ のいずれかになる．4 つの Bell 状態は Bell 測定によって誤りなく識別できるので，次の表に従って Bell 測定の結果にビット列を対応させれば，受信者は送信者が送った 2 ビットの古典情報を誤りなく得ることができる．

Bell 測定の結果	ビット列
$\|\Phi_+\rangle$	00
$\|\Psi_+\rangle$	01
$\|\Psi_-\rangle$	10
$\|\Phi_-\rangle$	11

すなわち，Bell 状態にある量子ビットの 1 つを用いて 2 ビットの古典情報を誤りなく伝送することができた．6.1.2 項で導入した一般化された Bell 状態と一般化された Pauli 行列を用いれば，$N \times N$ 次元 Hilbert 空間の完全なエンタングルメントをもった状態にある N 次元 Hilbert 空間で記述されるシステムに $2\log_2 N$ ビットの古典情報を載せて受信者に誤りなく送ることができる．これが理想的な量子デンスコーディングである．

送信者から受信者に送られる量子ビットが第三者によって盗聴される場合を考えてみよう．盗聴者は量子チャンネルを介して送られる量子ビットにアクセスできるが，受信者がすでに保持している量子ビットにはアクセスできない．したがって，盗聴者が得ることができる 1 量子ビットの状態 $\rho_{\rm eve}$ は次のようになる．

$$\rho_{\mathrm{eve}} = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{\text{受信者}} |\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| = \dfrac{1}{2}, \\ \mathrm{Tr}_{\text{受信者}} |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| = \dfrac{1}{2}, \\ \mathrm{Tr}_{\text{受信者}} |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| = \dfrac{1}{2}, \\ \mathrm{Tr}_{\text{受信者}} |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{6.2.54}$$

ここで，$\mathrm{Tr}_{\text{受信者}}(\cdots)$ は受信者が保持している量子ビットに関するトレース操作を表す．すなわち，送信者がどのビット列を送った場合にも盗聴者が得ることができる量子状態は同じで，かつ完全にランダムな量子状態である．この結果は，量子通信チャンネルによって送信者から受信者へ送られる量子ビットだけでは送信者が送った 2 ビットの古典情報をまったく得ることができないことを意味している．送信者と受信者があらかじめ共有する Bell 状態を一種の秘密鍵の共有とみなせば，量子デンスコーディングは量子力学の原理によって安全性が保証された暗号通信と考えることができる．

6.2.2 量子デンスコーディングの通信路容量

送信者から受信者に古典情報をどれだけ効率的に送ることができるかは通信システムの性質に依存する．情報伝送の効率は，通信システムの性質によって決まる通信路容量とよばれるパラメータによって与えられる．通信システムをくり返し利用して情報を送るとき，1 回あたりの利用で送ることができる情報量の理論的な上限が通信路容量である．Bell 状態を用いた理想的な量子デンスコーディングの通信路容量は 2 ビットであり，$N \times N$ 次元 Hilbert 空間の完全なエンタングルメントをもつ量子状態を利用した理想的な量子デンスコーディングの通信路容量は $2\log_2 N$ ビットである．情報を載せるための変換を行った量子系を伝送する量子チャンネルに損失や雑音が存在すれば，その通信路容量は $2\log_2 N$ ビットよりも小さくなる．そこで，一般に量子チャンネル $\mathcal{L}$ が与えられたとき，送信者と受信者が完全なエンタングルメントをもつ量子状態を共有して行う量子デンスコーディングシステムの通信路容量を求めよう．送信者が k 番目のメッセージ（情報）を適当な量子状態に載せて送信した場合に，受信者が受け取る量子状態を ρ_k と表そう．量子状態 ρ_k は送信者が情報を載せるために行う変換や量子チャンネルの性質に依存する．このような情報伝送システムの通信路容量 C は次の式で与えられ

る[*2].

$$C = \max_{\{\pi_k \mid \pi_k \geq 0, \sum_k \pi_k = 1\}} \left[S\left(\sum_k \pi_k \rho_k\right) - \sum_k \pi_k S(\rho_k) \right]. \qquad (6.2.55)$$

ここで，$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho)$ は量子状態 ρ の von Neumann エントロピーである．対数の底を 2 に選んだときの通信路容量がビットである．また，(6.2.55) の右辺で最大化を行う前の量は Holevo（ホレボー）関数とよばれる．

送信者と受信者が $N \times N$ 次元 Hilbert 空間の完全なエンタングルメントをもつ量子状態 $|\Phi\rangle = (1/\sqrt{N}) \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \otimes |k\rangle$ を共有していると仮定する．送信者は $2 \log_2 N$ ビットのメッセージ jk $(j, k = 0, 1, \ldots, N-1)$ を送るために，自分が保持するシステムに対して適当なユニタリ変換 U_{jk} を行う．その結果，送信者と受信者が共有している量子状態は次のようになる．

$$\rho_{jk} = (U_{jk} \otimes 1)|\Phi\rangle\langle\Phi|(U_{jk}^\dagger \otimes 1). \qquad (6.2.56)$$

送信者は変換を行ったシステムを量子チャンネル $\mathcal{L}$ を用いて受信者に送る．したがって，受信者は次のような量子状態を得ることになる．

$$\rho'_{jk} = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{I})[(U_{jk} \otimes 1)|\Phi\rangle\langle\Phi|(U_{jk}^\dagger \otimes 1)]. \qquad (6.2.57)$$

このような通信システムの Holevo 関数 $\chi(\mathcal{L}, \pi)$ は次の式で与えられる．

$$\chi(\mathcal{L}, \pi) = S(\rho') - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \pi_{jk} S(\rho'_{jk}). \qquad (6.2.58)$$

ここで，π_{jk} は条件 $\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \pi_{jk} = 1$ を満足する非負パラメータであり，量子状態 ρ' は次の式で定義される．

---

*2　これは古典情報伝送に関する量子通信路符号化定理である．

$$\rho' = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \pi_{jk} \rho'_{jk}. \tag{6.2.59}$$

通信路容量 C を求めるために，Holevo 関数 $\chi(\mathcal{L}, \pi)$ の右辺の各項を評価しよう．まず，von Neumann エントロピーの劣加法性（sub-additivity）から次の不等式が成り立つ．

$$S(\rho') \le S(\rho'_{\text{送信者}}) + S(\rho'_{\text{受信者}}). \tag{6.2.60}$$

ここで，$\rho'_{\text{送信者}} = \mathrm{Tr}_{\text{受信者}} \rho'$ は全体の量子状態から受信者のシステムに関する情報を消去した送信者のシステムの量子状態であり，$\rho'_{\text{受信者}} = \mathrm{Tr}_{\text{送信者}} \rho'$ は同様に受信者のシステムの量子状態である．また，完全なエンタングルメントをもつ状態 $|\Phi_{jk}\rangle = (U_{jk} \otimes 1)|\Phi\rangle$ は次の性質を満足する．

$$\mathrm{Tr}_{\text{受信者}} |\Psi_{jk}\rangle\langle\Psi_{jk}| = \frac{1}{N}, \tag{6.2.61}$$

$$\mathrm{Tr}_{\text{送信者}} |\Psi_{jk}\rangle\langle\Psi_{jk}| = \frac{1}{N}. \tag{6.2.62}$$

これらの性質と量子通信チャンネル $\mathcal{L}$ がトレースを保存することを用いれば，量子状態 $\rho'_{\text{送信者}}$ と $\rho'_{\text{受信者}}$ は次の式のようになる．

$$\rho'_{\text{送信者}} = \frac{1}{N} \mathcal{L} 1, \qquad \rho'_{\text{受信者}} = \frac{1}{N}. \tag{6.2.63}$$

一方，完全なエンタングルメントをもつ状態 $|\Phi\rangle$ の性質から次の式が成り立つ．

$$(U_{jk} \otimes 1)|\Phi\rangle = (1 \otimes U_{jk}^{\mathrm{T}})|\Phi\rangle. \tag{6.2.64}$$

この関係式と von Neumann エントロピーが量子状態のユニタリ変換の下で不変であることを用いれば，次の式を導くことができる．

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\pi_{jk}S(\rho'_{jk}) = S((\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})|\Phi\rangle\langle\Phi|). \tag{6.2.65}$$

ここで，$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\pi_{jk}=1$ が成り立つことを用いた．以上の結果から Holevo 関数 $\chi(\mathcal{L},\pi)$ に対しては次の不等式が成り立つ．

$$\chi(\mathcal{L},\pi) \le \log N + S\left(\frac{1}{N}\mathcal{L}1\right) - S((\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})|\Phi\rangle\langle\Phi|). \tag{6.2.66}$$

この不等式の右辺はパラメータ π_{jk} に依存しないので，通信路容量 $C(\mathcal{L})$ に対しても同様の不等式が成り立つ．

$$C(\mathcal{L}) \le \log N + S\left(\frac{1}{N}\mathcal{L}1\right) - S((\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})|\Phi\rangle\langle\Phi|). \tag{6.2.67}$$

次に，送信者が行うユニタリ変換とパラメータ π_{jk} を適当に選ぶことによって不等式 (6.2.67) において等号が成り立つことを示す．このためには，von Neumann エントロピーの劣加法性 (6.2.60) において，等号が成り立つようにできれば十分である．そこで，ユニタリ行列 U_{jk} を一般化された Pauli 行列とし，パラメータ π_{jk} を $\pi_{jk}=1/N^2$ と設定してみよう．一般化された Pauli 行列 U_{jk} の性質 (6.1.13) を用いれば，量子状態 ρ' を次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})(U_{jk}\otimes 1)|\Phi\rangle\langle\Phi|(U_{jk}^\dagger\otimes 1) \\
&= (\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})\left[\frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(U_{jk}\otimes 1)|\Phi\rangle\langle\Phi|(U_{jk}^\dagger\otimes 1)\right] \\
&= (\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})\left(\frac{1}{N}\otimes \mathrm{Tr}_{\text{送信者}}|\Phi\rangle\langle\Phi|\right) \\
&= (\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})\left(\frac{1}{N}\otimes\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N}\mathcal{L}1\otimes\frac{1}{N}.
\end{aligned} \tag{6.2.68}$$

したがって，等号 $S(\rho')=\log N + S((1/N)\mathcal{L}1)$ が成り立つことがわかる．以上の結果から，量子デンスコーディングシステムの古典通信路容量 $C(\mathcal{L})$ は次の式で与

えられる [58].

$$C(\mathcal{L}) = \log N + S\left(\frac{1}{N}\mathcal{L}1\right) - S((\mathcal{L}\otimes\mathcal{I})|\Phi\rangle\langle\Phi|). \tag{6.2.69}$$

量子チャンネルに損失や雑音がない場合 $(\mathcal{L}=\mathcal{I})$ には，通信路容量は $C(\mathcal{I}) = 2\log N$ となる.

6.2.3 外部環境の影響下での量子デンスコーディング

外部環境の影響下で行われる量子ビットを用いた量子デンスコーディングの情報伝送特性を調べよう．外部環境の影響が避けられない場合，送信者と受信者がエンタングルメントを共有する際にも外部環境の影響によるディコヒーレンスが起こってしまう．しかし，エンタングルメントを共有する操作は情報伝送を始める前に行われるので，エンタングルメントのディスティレーションを許せば，外部環境の影響がある限界を超えない限り，送信者と受信者は完全なエンタングルメントを共有することができる*3．したがって，送信者と受信者は Bell 状態 $|\Phi\rangle$ を共有していると仮定して，議論を進めることにする．また，外部環境の影響は (4.1.63)-(4.1.66) で定義される非 Markov 量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ で記述されるものと仮定する [56].

送信者は 2 ビットの古典情報を受信者に送るために，ビット列 $\{00, 01, 10, 11\}$ に対応して自分が保持している量子ビットに対して行列 $1, \sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ を用いてユニタリ変換を行う．変換を行った後，送信者と受信者が共有する量子状態はビット列に対応した 4 つの Bell 状態 $|\Phi_+\rangle, |\Psi_+\rangle, |\Psi_-\rangle, |\Phi_-\rangle$ のいずれかになる．送信者はユニタリ変換を行った量子ビットを量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ を用いて受信者に送る．したがって，(4.1.63)-(4.1.66) から受信者が得る 2 量子ビット状態は送信者が送った情報に依存して次の 4 つの状態のいずれかである.

*3 エンタングルメントのディスティレーションを行うためには多くのシステムのリソースが必要となり通信コストが大きくなるが，本書ではこのような問題にはふれないことにする.

$$
\begin{aligned}
\rho_{00} &= (\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| \\
&= \frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|\right),
\end{aligned}
\tag{6.2.70}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{01} &= (\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| \\
&= \frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|\right),
\end{aligned}
\tag{6.2.71}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{10} &= (\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \\
&= \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + \frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_-|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|\right),
\end{aligned}
\tag{6.2.72}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{11} &= (\mathcal{L}_t \otimes \mathcal{I})|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
&= \frac{1}{4}(1-\gamma_t)^2|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+| + \frac{1}{4}(1+\gamma_t)^2|\Phi_-\rangle\langle\Phi_-| \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_-| + |\Phi_-\rangle\langle\Phi_+|\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w\left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+|\right).
\end{aligned}
\tag{6.2.73}
$$

前節での考察から明らかなように，通信路容量 C は 2 ビットの古典情報の生起確率が等しい場合に達成されるので，量子デンスコーディングシステムの通信路容

量 C は次の式で与えられる．

$$C = S\left(\frac{\rho_{00}+\rho_{01}+\rho_{10}+\rho_{11}}{4}\right) - \frac{1}{4}\left[S\left(\rho_{00}\right)+S\left(\rho_{01}\right)+S\left(\rho_{10}\right)+S\left(\rho_{11}\right)\right]. \tag{6.2.74}$$

量子状態の平均 $\frac{1}{4}(\rho_{00}+\rho_{01}+\rho_{10}+\rho_{11})$ は次のような行列で与えられる．

$$\frac{1}{4}\left(\rho_{00}+\rho_{01}+\rho_{10}+\rho_{11}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & (1-\gamma_t^2)w & 0 & 0 \\ (1-\gamma_t^2)w & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1-\gamma_t^2)w \\ 0 & 0 & (1-\gamma_t^2)w & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.2.75}$$

この行列の固有値は次の式で与えられる．

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w, \tag{6.2.76}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)w. \tag{6.2.77}$$

一方，個別の量子状態 $\rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{10}, \rho_{11}$ はいずれも同じ固有値をもち，次の式で与えられる．

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(1+\gamma_t^2) + \frac{1}{4}\sqrt{(2\gamma_t)^2 + (1-\gamma_t^2)^2 w^2}, \tag{6.2.78}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(1+\gamma_t^2) - \frac{1}{4}\sqrt{(2\gamma_t)^2 + (1-\gamma_t^2)^2 w^2}, \tag{6.2.79}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)(1+w), \tag{6.2.80}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)(1-w). \tag{6.2.81}$$

したがって，量子チャンネル $\mathcal{L}_t$ の影響下で行われる量子デンスコーディングの通信路容量 C は次の式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
C = &-\frac{1}{2}[1+(1-\gamma_t^2)w]\log_2[1+(1-\gamma_t^2)w] \\
&-\frac{1}{2}[1-(1-\gamma_t^2)w]\log_2[1-(1-\gamma_t^2)w] \\
&+\frac{1}{2}(1-\gamma_t^2)\log_2(1-\gamma_t^2) \\
&+\frac{1}{4}(1-\gamma_t^2)\,[(1+w)\log_2(1+w)+(1-w)\log_2(1-w)] \\
&+\frac{1}{4}\left[1+\gamma_t^2+\sqrt{(2\gamma_t)^2+(1-\gamma_t^2)^2w^2}\right] \\
&\qquad\times\log_2\left[1+\gamma_t^2+\sqrt{(2\gamma_t)^2+(1-\gamma_t^2)^2w^2}\right] \\
&+\frac{1}{4}\left[1+\gamma_t^2-\sqrt{(2\gamma_t)^2+(1-\gamma_t^2)^2w^2}\right] \\
&\qquad\times\log_2\left[1+\gamma_t^2-\sqrt{(2\gamma_t)^2+(1-\gamma_t^2)^2w^2}\right]
\end{aligned}
\tag{6.2.82}
$$

ここでは，通信路容量の単位をビットに選んだ．特に，$w=0$ の場合（外部環境の温度が十分に高い場合）には，通信路容量 C は次のような簡単な形になる．

$$
C_{H\,|\,w=0} = (1+\gamma_t)\log_2(1+\gamma_t)+(1-\gamma_t)\log_2(1-\gamma_t). \tag{6.2.83}
$$

通信路容量 C を量子ビットの伝送時間 t の関数としてプロットすると図 6.2 のようになる．

以上で議論した量子デンスコーディングでは，送信者がビット列 jk を送ったとき，受信者は量子状態 ρ_{jk} にある 2 個の量子ビットを得ることになる．そこで，受信者が送信者の送ったビット列を調べるために，自分が保持している 2 個の量子ビットから成るシステムに対して Bell 測定を行い，測定結果に基づいて $|\Phi_+\rangle \to 00$, $|\Psi_+\rangle \to 01$, $|\Psi_-\rangle \to 10$, $|\Phi_-\rangle \to 11$ と判断する場合を考えよう．このとき，送信者がビット列 jk を送った場合に受信者がビット列 lm を受け取ったと判断する条件付き確率 $P(lm|jk)$ は次のような行列で与えられる．

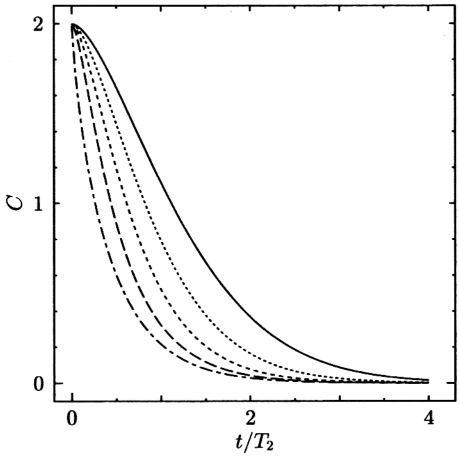


図 **6.2** 非 Markov 量子チャンネルの影響下で行われる量子デンスコーディングの通信路容量 C の伝送時間依存性 [56]. ——は $\tau_{\mathrm{R}}/T_2 = 2.0$, ……は $\tau_{\mathrm{R}}/T_2 = 1.0$, -----は $\tau_{\mathrm{R}}/T_2 =$ 0.5, ‒‒は $\tau_R/T_2 = 0.2$, ‒‒‒は $\tau_{\mathrm{R}}/T_2 = 0.0$ (Markov 近似に対応) である. また, $w = -1/2$ であり, 情報量の単位はビットである.

$$
\mathsf{P}_{\mathrm{Bell}} = \begin{pmatrix} \langle\Phi_+|\rho_{00}|\Phi_+\rangle & \langle\Phi_+|\rho_{01}|\Phi_+\rangle & \langle\Phi_+|\rho_{10}|\Phi_+\rangle & \langle\Phi_+|\rho_{11}|\Phi_+\rangle \\ \langle\Psi_+|\rho_{00}|\Psi_+\rangle & \langle\Psi_+|\rho_{01}|\Psi_+\rangle & \langle\Psi_+|\rho_{10}|\Psi_+\rangle & \langle\Psi_+|\rho_{11}|\Psi_+\rangle \\ \langle\Psi_-|\rho_{00}|\Psi_-\rangle & \langle\Psi_-|\rho_{01}|\Psi_-\rangle & \langle\Psi_-|\rho_{10}|\Psi_-\rangle & \langle\Psi_-|\rho_{11}|\Psi_-\rangle \\ \langle\Phi_-|\rho_{00}|\Phi_-\rangle & \langle\Phi_-|\rho_{01}|\Phi_-\rangle & \langle\Phi_-|\rho_{10}|\Phi_-\rangle & \langle\Phi_-|\rho_{11}|\Phi_-\rangle \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+\gamma_t)^2 & (1-\gamma_t)^2 & 1-\gamma_t^2 & 1-\gamma_t^2 \\ (1-\gamma_t)^2 & (1+\gamma_t)^2 & 1-\gamma_t^2 & 1-\gamma_t^2 \\ 1-\gamma_t^2 & 1-\gamma_t^2 & (1+\gamma_t)^2 & (1-\gamma_t)^2 \\ 1-\gamma_t^2 & 1-\gamma_t^2 & (1-\gamma_t)^2 & (1+\gamma_t)^2 \end{pmatrix}. \tag{6.2.84}
$$

このような行列は通信システムのチャンネル行列とよばれる. チャンネル行列を用いて Shannon 相互情報量 I_{Bell} を計算すると次の結果が得られる.

$$
I_{\mathrm{Bell}} = (1+\gamma_t)\log(1+\gamma_t) + (1-\gamma_t)\log(1-\gamma_t). \tag{6.2.85}
$$

したがって, 任意の伝搬時間 t において等号 $C_{w=0} = I_{\mathrm{Bell}}$ が成り立つ. この結果は, $w=0$ が成り立つ場合には, 受信者が情報を得るためには Bell 測定が最適な

量子測定であることを示している．

6.3 無限次元系への拡張

これまでは量子ビットや N 次元 Hilbert 空間で記述されるシステムを用いた量子テレポーテーションや量子デンスコーディングについて議論してきた．これらは**離散変数量子通信**とよばれる．一方，コヒーレント状態やスクィーズド状態のような量子光学で用いられる代表的な量子状態は無限次元 Hilbert 空間に属する．無限次元 Hilbert 空間に属する量子状態を用いた量子テレポーテーションや量子デンスコーディングは一般に**連続変数量子通信**とよばれる [59, 60]．離散変数量子通信で用いられていた Bell 測定は，連続変数量子通信ではホモダイン測定*4を組み合わせた位置・運動量同時測定に対応し，Pauli 行列は並進演算子に対応する．また，Bell 状態の役割は 2 モード・スクィーズド状態が果たすことになる．以下では，連続変数量子テレポーテーションについて考察しよう [62, 63]．

まず，連続変数量子通信において重要な役割を果たす並進演算子と位置・運動量同時測定を記述する射影演算子の基本的な性質をまとめておく．調和振動子の消滅演算子 a，生成演算子 $a^\dagger$，および複素パラメータ α を用いて定義される並進演算子 $D(\alpha)=\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}$ は次の性質を満足する．

$$\mathrm{Tr}[D(\alpha)D^\dagger(\beta)]=\pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta), \tag{6.3.86}$$

$$\int\frac{d^2\alpha}{\pi}D(\alpha)XD^\dagger(\alpha)=(\mathrm{Tr}X)1. \tag{6.3.87}$$

すなわち，並進演算子 $D(\alpha)$ は有限次元系における一般化された Pauli 行列 U_{jk} と同様の性質をもつ．また，並進演算子は正準交換関係 $[Q,P]=i\,(\hbar\equiv1)$ を満足する位置演算子 Q と運動量演算子 P を用いて表すと次のようになる．

---

*4 ホモダイン測定とは直交位相振幅 $X(\phi)=(a\mathrm{e}^{-i\phi}+a^\dagger\mathrm{e}^{i\phi})/\sqrt{2}$ を測るための測定である [61]．$\phi=0$ ならば位置の測定になり，$\phi=\pi/2$ ならば運動量の測定になる．

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \\ &= \mathrm{e}^{i(pQ - xP)} \\ &\equiv D(x,p). \end{aligned} \tag{6.3.88}$$

ここで，$a=(Q+iP)/\sqrt{2}$，および $\alpha=(x+ip)/\sqrt{2}$ である．一方，位置・運動量同時測定は次の式で与えられる射影演算子 $X(x,p)$ によって記述される．

$$X(x,p) = |\Phi(x,p)\rangle\langle\Phi(x,p)|. \tag{6.3.89}$$

ここで，状態ベクトル $|\Phi(x,p)\rangle$ は次の式で定義される．

$$|\Phi(x,p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, |x+y\rangle \otimes |y\rangle\, \mathrm{e}^{ipy}. \tag{6.3.90}$$

位置演算子 Q の固有状態 $|x\rangle$ が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ において完全正規直交系を張ることを用いれば，Hilbert 空間 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ 上で定義される射影演算子 $X(x,p)$ は次の関係式を満足する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp\, X(x,p) = 1\otimes 1, \tag{6.3.91}$$

$$X(x,p)X(x',p') = \delta(x-x')\delta(p-p')X(x,p). \tag{6.3.92}$$

さらに，状態ベクトル $|\Psi(x,p)\rangle$ は次の固有値方程式を満足する．

$$(Q_a - Q_b)|\Phi(x,p)\rangle = x|\Phi(x,p)\rangle, \tag{6.3.93}$$

$$(P_a + P_b)|\Phi(x,p)\rangle = p|\Phi(x,p)\rangle. \tag{6.3.94}$$

ここで，Q_a, Q_b と P_a, P_b は各モードの位置演算子と運動量演算子を表す．位置・運動量同時測定は有限次元系における一般化された Bell 測定に対応する．

送信者と受信者が任意の 2 モード状態 W を共有して，量子状態 ρ_{in} を量子テレポーテーションによって伝送する場合を考える．送信者は量子状態 ρ_{in} にあるシステムと 2 モード状態 W にあるシステムの 1 つから成る合成系に対して位置・運動量同時測定を行い，測定結果を古典通信によって受信者に知らせる．測定結果を受

け取った受信者は自分が保持しているシステムに対して並進演算子を用いてユニタリ変換を行うものとする．このような手順で行われる量子テレポーテーションは標準プロトコルの連続変数量子テレポーテーションとよばれる*5．状態ベクトル $|\Phi(x,p)\rangle$ が 2 モードの Hilbert 空間 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ において完全正規直交系を張ることを用いれば，送信者と受信者が共有している任意の 2 モード量子状態 W は次のように展開することができる．

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}dr_1\int_{-\infty}^{\infty}dr_2\int_{-\infty}^{\infty}dk_1\int_{-\infty}^{\infty}dk_2 \\ \times F_W(r_1,k_1;r_2,k_2)|\Phi(r_1,k_1)\rangle\langle\Phi(r_2,k_2)|. \tag{6.3.95}$$

ここで，展開係数 $F_W(r_1,k_1;r_2,k_2)$ は次の式で与えられる．

$$F_W(r_1,k_1;r_2,k_2)=\langle\Phi(r_1,k_1)|W|\Phi(r_2,k_2)\rangle. \tag{6.3.96}$$

また，展開係数 $F_W(r_1,k_1;r_2,k_2)$ は次の規格化条件を満足する．

$$\int_{-\infty}^{\infty}dr\int_{-\infty}^{\infty}dk\,F_W(r,k;r,k)=\mathrm{Tr}\,W=1. \tag{6.3.97}$$

有限次元系の量子テレポーテーションと等価な量子チャンネルを求めた場合と同様にして，送信者が位置・運動量同時測定を行い，測定結果 (x,p) を得た場合のシステム全体の量子状態 $\rho(x,p)$ は次の式で与えられる．

$$\rho(x,p)=\frac{(X(x,p)\otimes 1)\,(\rho_{\mathrm{in}}\otimes W)\,(X(x,p)\otimes 1)}{\mathrm{Tr}\left[(X(x,p)\otimes 1)\,(\rho_{\mathrm{in}}\otimes W)\right]}. \tag{6.3.98}$$

ここで，送信者が位置・運動量同時測定の結果 (x,p) を得る確率 $P(x,p)$ は次の式で与えられる．

$$P(x,p)=\mathrm{Tr}\left[(X(x,p)\otimes 1)\,(\rho_{\mathrm{in}}\otimes W)\right]. \tag{6.3.99}$$

測定結果 (x,p) を知らされた受信者は自分が保持しているシステムに対して並進

*5　標準プロトコルの量子テレポーテーションが必ずしも最適なものとは限らない．

演算子 $D(x,p)$ を用いてユニタリ変換を行う．このとき，受信者のシステムの量子状態 $\rho'(x,p)$ は次のようになる．

$$\rho'(x,p)=\frac{D(x,p)\left\{\mathrm{Tr}_{\text{送信者}}\left[(X(x,p)\otimes 1)\,(\rho_{\mathrm{in}}\otimes W)\right]\right\}D^\dagger(x,p)}{\mathrm{Tr}\left[(X(x,p)\otimes 1)\,(\rho_{\mathrm{in}}\otimes W)\right]}. \tag{6.3.100}$$

したがって，受信者が平均として得ることができる量子状態 ρ_{out} は次の式で与えられる．

$$\rho_{\mathrm{out}}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\,P(x,p)\rho'(x,p). \tag{6.3.101}$$

この式の右辺を計算することによって，連続変数量子テレポーテーションと等価な量子チャンネルを求めることができる．

状態ベクトル $|\Phi(x,p)\rangle$ の性質を用いて $\mathrm{Tr}_{\text{送信者}}\left[(X(x,p)\otimes 1)\,(\rho_{\mathrm{in}}\otimes W)\right]$ を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{\text{送信者}}\left[(X(x,p)\otimes 1)\,(\rho_{\mathrm{in}}\otimes W)\right]\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dr_1\int_{-\infty}^{\infty}dr_2\int_{-\infty}^{\infty}dk_1\int_{-\infty}^{\infty}dk_2F_W(r_1,k_1;r_2,k_2)\\
&\quad\times \mathrm{e}^{-ip(r_1-r_2)-i(k_1-k_2)x-\frac{1}{2}ik_1r_1+\frac{1}{2}ik_2r_2}\\
&\quad\times D^\dagger(x,p)D(-r_1,k_1)\rho_{\mathrm{in}}D^\dagger(-r_2,k_2)D(x,p).
\end{aligned} \tag{6.3.102}$$

この結果を用いて (6.3.101) の右辺を計算すれば，次の式が得られる．

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{out}}&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\,\langle\Phi(x,p)|W|\Phi(x,p)\rangle D(-x,p)\rho_{\mathrm{in}}D^\dagger(-x,p)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\,\langle\Phi(-x,p)|W|\Phi(-x,p)\rangle D(x,p)\rho_{\mathrm{in}}D^\dagger(x,p).
\end{aligned} \tag{6.3.103}$$

この関係式が連続変数量子テレポーテーションと等価な量子チャンネル $\mathcal{K}$ ($\rho_{\mathrm{out}}=\mathcal{K}\rho_{\mathrm{in}}$) を与える．また，この結果は離散変数量子テレポーテーションの場合の一般化された Pauli チャンネル (6.1.28) に対応するものである．

連続変数量子テレポーテーションを行うための代表的な 2 モード状態は，次の式で与えられる 2 モードスクィーズド真空状態 $|\Psi_r\rangle$ である．

$$\begin{aligned}|\Psi_r\rangle &= \mathrm{e}^{r(a^\dagger b^\dagger - ab)}|0,0\rangle \\ &= \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh r)^n|n,n\rangle \quad (r \geq 0).\end{aligned} \tag{6.3.104}$$

ここで，$|n,m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle$ は各モードの粒子数固有状態である．この場合，元の量子状態 ρ_{in} と連続変数量子テレポーテーションによって伝送された量子状態 ρ_{out} は次の関係式で結ばれる．

$$\rho_{\mathrm{out}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{e}^{-2r}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\,\exp\left(-\frac{x^2+p^2}{2\mathrm{e}^{-2r}}\right)D(x,p)\rho_{\mathrm{in}}D^\dagger(x,p) \tag{6.3.105}$$

この関係式は2モードスクィーズド状態を用いた連続変数量子テレポーテーションが，平均光子数が e^{-2r} で与えられるような熱雑音が混入するような量子チャンネルと等価であることを示している．この場合，スクィージング強度が無限大の極限 $(r \to \infty)$ でのみ完全なテレポーテーション $(\rho_{\mathrm{out}} = \rho_{\mathrm{in}})$ が可能である．特に，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を伝送する場合，量子テレポーテーションの性能を表す忠実度は $F = \langle\alpha|\rho_{\mathrm{out}}|\alpha\rangle = (1+\mathrm{e}^{-2r})^{-1}$ で与えられる．

第 III 部
量子確率過程への誘い

非平衡系統計力学の基礎概念は，表 7.1 にあるように，4 つの観点に分類される．観点 I では，分子混沌あるいは非平衡性を導く同様の仮定の下に，一粒子分布関数を扱う．古典統計力学では，μ 位相空間における分布関数を扱うことになる．Boltzmann（ボルツマン）は，自然界の非可逆性を，微視的で可逆の Newton 力学に基づいて説明することを試みた．当初の導出過程では，Boltzmann 本人も気付いていなかったのであるが，Boltzmann 方程式に不可逆性を付与するため，「分子の混沌」とよばれる巧妙な確率的操作が施されていたのである（統計力学における不可逆性にかかわるこの点の簡単な解説は，[64] にある）．

観点 II では，考察している系のアンサンブルの分布を記述する統計演算子を扱う．古典統計力学の言葉を借りると，Γ 位相空間の状態点の集まりを扱うのである．なお，1 つの状態点は，考察している 1 つの系全体の運動状態を記述している．不可逆性は，Γ 位相空間を粗視化することにより導入される．

観点 III では，特定の確率過程を記述する確率微分方程式が生成する動力学的変数の経路を扱う．系の非可逆性は乱雑力により引き起こされる．

観点 IV では，位相空間における経路の束の分布を扱う [65, 66]．各時刻での乱雑力（確率過程）の形態により，その時刻における位相空間の流れ場のパターン（流線）が決まる．状態点は，時々刻々変化する流線を渡り歩き，対応する Langevin 方程式が記述するの

表 7.1　非平衡統計力学の基礎概念

観点	創始者	基礎方程式	キー・ワード
I	Boltzmann	Boltzmann 方程式 運動学的方程式	一粒子分布関数 分子混沌
II	Gibbs （ギッブス）	マスター方程式 Fokker-Planck 方程式	統計演算子 アンサンブル
III	Einstein （アインシュタイン）	Langevin 方程式	乱雑力 動的な変数
IV	久保	確率 Liouville 方程式	乱雑力 位相空間の変数

とまったく同じ運動を再現するのである．

第 III 部では，量子系の確率過程を扱う*1．まず，第 7 章では，量子 Langevin 方程式の微視的導出を紹介する．量子力学の Heisenberg 方程式から量子系の Langevin 方程式を捻り出す手続きと，その問題点を詳細に扱う．その過程で，量子 Brown（ブラウン）運動が導入される．第 8 章，第 9 章では，熱平衡状態から遠く離れた（far-from-equilibrium state）量子散逸系を，通常の量子力学や場の量子論と同様の正準演算子代数形式で扱う理論体系を導入する*2．第 8 章では，量子散逸系を記述する量子マスター方程式（散逸 Schrödinger 方程式），および，それと表裏一体を成す散逸 Heisenberg 方程式が導出される．ここは NETFD 体系全体の要を成す部分である．第 9 章では，量子確率微分方程式（量子確率 Liouville 方程式，および，それと対を成す量子 Langevin 方程式）が与えられる．あわせて，熱的量子 Brown 運動が導入される．その上で，量子確率微分方程式のボソン系とスピン系への応用を行う．

*1　以下第 III 部では，Planck 定数 $\hbar$ を $\hbar = 1$，Boltzmann 定数 k_B を $k_B = 1$ とする単位系を採用する．

*2　この理論体系は，Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics（NETFD）とよばれる．NETFD 建設の道筋が，関連重要論文とともに，付録 A.9 節にまとめられている．

第7章

量子Langevin方程式の微視的導出

量子Langevin方程式の研究は，Senitzky [67]，Lax [68]，Haken [69]による量子力学的減衰振動子の考察により始まった．それ以来，量子Langevin方程式を微視的な観点から導出する多くの試みがなされてきた．なかでも柴田・橋爪 [70]は，射影演算子の方法を微視的なHeisenberg方程式に応用し，量子Langevin方程式の導出を試みた．時間推進子を，注目系の時間発展を記述する部分と非注目系（乱雑力を生成する系）の時間発展を記述する部分との2つに分解する．導出に当たって，演算子が確率的になった後も解析関数に対する微分法が適用された．量子Langevin方程式を得るためには，微視的なHeisenberg方程式に現れる演算子は，確率的演算子で置き換えられなければならない（一種の動的写像） [71, 72].

この章では，まず7.1節で，Senitzky [67]やLax [68]による微視的立場からの量子Langevin方程式の導出を紹介し，得られたLangevin方程式（S. & L. Langevin方程式と名付ける）がStratonovich（ストラトノヴィチ）型の確率微分方程式であることを見る．その過程で導入された乱雑力演算子（7.2節）を足掛かりにして，7.3節では，量子系での白色雑音である量子Brown運動を導入する．7.4節では，柴田・橋爪 [70]による量子Langevin方程式（S-H Langevin方程式と名付ける）の射影演算子による導出を紹介する．7.5節で，S-H Langevin方程式が，Stratonovich型ではなく，伊藤（Ito）型の確率微分方程式であることを見る．

7.1 S. & L. Langevin方程式

この節では，Senitzky [67]，Lax [68]による量子Langevin方程式（S. & L. Langevin方程式）の導出を，量子調和振動子モデルを利用して紹介する．

7.1.1 微視的モデル

角振動数 ω_0 の量子調和振動子 1 つが，角振動数 $\omega_\ell(\ell=1,2,\cdots)$ の無数の量子調和振動子と相互作用している系を考える．そのハミルトニアンが，

$$H=H_{\rm S}+H_{\rm R}+H_{\rm SR} \tag{7.1.1}$$

で与えられるものとしよう．ただし，

$$H_{\rm S}=\omega_0 a^\dagger a, \quad H_{\rm R}=\sum_\ell \omega_\ell b_\ell^\dagger b_\ell \tag{7.1.2}$$

は各調和振動子の自由ハミルトニアンで，調和振動子間の相互作用が

$$H_{\rm SR}=a^\dagger R+R^\dagger a, \quad R=\sum_\ell g_\ell b_\ell \tag{7.1.3}$$

で与えられるものとする．各演算子は，正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger]=1, \quad [b_\ell,\ b_m^\dagger]=\delta_{\ell m} \tag{7.1.4}$$

を満たす．他の演算子の組み合わせは可換とする．

初期時刻では，角振動数 ω_0 の注目系の調和振動子と環境系の調和振動子の間には，相関がないものとする．また，角振動数 ω_ℓ の無数の量子調和振動子で構成される系（以下では，環境系として扱う）は，初期時刻 $t=0$ に温度 T の熱平衡状態にあると仮定する．すなわち，初期時刻での環境系の統計演算子 $\rho_{\rm R}$ は

$$\rho_{\rm R}\propto {\rm e}^{-H_{\rm R}/T} \tag{7.1.5}$$

で与えられている．たとえば，初期時刻での期待値は，

$$\langle b_\ell\rangle_{\rm R}=\frac{{\rm Tr}(b_\ell\rho_{\rm R})}{{\rm Tr}(\rho_{\rm R})}=0, \tag{7.1.6}$$

$$\langle b_m^\dagger b_\ell \rangle_{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{Tr}(b_m^\dagger b_\ell \rho_{\mathrm{R}})}{\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{R}})} = \bar{n}_\ell \delta_{m\ell}, \quad \bar{n}_\ell = \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega_\ell/T} - 1} \tag{7.1.7}$$

などとなる.

7.1.2 量子 Langevin 方程式の導出準備

ハミルトニアン (7.1.1) で記述される系の Heisenberg 方程式は,

$$\frac{d}{dt}a(t) = i[H(t),\ a(t)] = -i\omega_0 a(t) - iR(t), \tag{7.1.8}$$

$$\frac{d}{dt}b_\ell(t) = i[H(t),\ b_\ell(t)] = -i\omega_\ell b_\ell(t) - ig_\ell^* a(t) \tag{7.1.9}$$

である. (7.1.9) を初期条件 $b_\ell(t=0) = b_\ell$ の下に解くと,

$$b_\ell(t) = b_\ell^{\mathrm{I}}(t) - i\int_0^t ds\ g_\ell^* a(s) \mathrm{e}^{-i\omega_\ell(t-s)} \tag{7.1.10}$$

となる. ただし,

$$b_\ell^{\mathrm{I}}(t) = b_\ell \mathrm{e}^{-i\omega_\ell t} \tag{7.1.11}$$

とおいた. これは相互作用表示での演算子であるので, 上付き I を付した. 以下, 上付き I の付いた演算子は相互作用表示の演算子であるものとする. (7.1.10) より

$$R(t) = \sum_\ell g_\ell b_\ell(t) \tag{7.1.12}$$

が得られるので, これを代入すると (7.1.8) は

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) - \sum_\ell |g_\ell|^2 \int_0^t ds\ a(s) \mathrm{e}^{-i\omega_\ell(t-s)} - iR^{\mathrm{I}}(t) \tag{7.1.13}$$

となる. ただし,

$$R^{\rm I}(t) = \sum_{\ell} g_\ell b_\ell^{\rm I}(t) \tag{7.1.14}$$

とおいた．

ここで，回転系における演算子 $\bar{a}(t)$, $\bar{R}(t)$, $\bar{R}^{\rm I}(t)$ を，

$$a(t) = \bar{a}(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \tag{7.1.15}$$

$$R(t) = \bar{R}(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}, \qquad R^{\rm I}(t) = \bar{R}^{\rm I}(t)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \tag{7.1.16}$$

にて導入すると*1，(7.1.13) は

$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t) = -\sum_{\ell} |g_\ell|^2 \int_0^t ds\ \bar{a}(t-s)\mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)s} - i\bar{R}^{\rm I}(t) \tag{7.1.17}$$

となる．なお，$\bar{R}^{\rm I}(t)$ と $\bar{R}^{\rm I}(t')^\dagger$ の交換関係や 2 次モーメントは，

$$\begin{aligned}
[\bar{R}^{\rm I}(t),\ \bar{R}^{\rm I}(t')^\dagger] &= \sum_{\ell}\sum_{m} g_\ell g_m^* \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)t}\mathrm{e}^{-i(\omega_m-\omega_0)t'}[b_\ell,\ b_m^\dagger] \\
&= \sum_{\ell} |g_\ell|^2 \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)(t-t')},
\end{aligned} \tag{7.1.18}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{R}^{\rm I}(t)\bar{R}^{\rm I}(t')^\dagger \right\rangle_{\rm R} &= \sum_{\ell}\sum_{m} g_\ell g_m^* \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)t}\mathrm{e}^{-i(\omega_m-\omega_0)t'} \left\langle b_\ell b_m^\dagger \right\rangle_{\rm R} \\
&= \sum_{\ell}\sum_{m} g_\ell g_m^* \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)t}\mathrm{e}^{-i(\omega_m-\omega_0)t'} \left\langle \delta_{m\ell} + b_m^\dagger b_\ell \right\rangle_{\rm R} \\
&= \sum_{\ell} |g_\ell|^2 \left(1+\bar{n}_\ell\right) \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)(t-t')},
\end{aligned} \tag{7.1.19}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{R}^{\rm I}(t')^\dagger \bar{R}^{\rm I}(t) \right\rangle_{\rm R} &= \sum_{\ell}\sum_{m} g_\ell g_m^* \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)t}\mathrm{e}^{-i(\omega_m-\omega_0)t'} \left\langle b_m^\dagger b_\ell \right\rangle_{\rm R} \\
&= \sum_{\ell}\sum_{m} g_\ell g_m^* \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)t}\mathrm{e}^{-i(\omega_m-\omega_0)t'} \left\langle b_m^\dagger b_\ell \right\rangle_{\rm R} \\
&= \sum_{\ell} |g_\ell|^2 \bar{n}_\ell \mathrm{e}^{-i(\omega_\ell-\omega_0)(t-t')}
\end{aligned} \tag{7.1.20}$$

で与えられる．(7.1.19) の第 2 等号では交換関係 (7.1.4) を用いた．(7.1.19) と

---

*1　回転系の演算子に対するこの文字記法は，この節のみで使用するものである．

(7.1.20) の第 3 等号では，(7.1.7) を利用した．1 次のモーメントについては，(7.1.6) より，

$$\langle \bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}} = 0, \quad \langle \bar{R}^{\mathrm{I}}(t)^{\dagger}\rangle_{\mathrm{R}} = 0 \tag{7.1.21}$$

であることがわかる．

7.1.3 量子 Langevin 方程式への移行

b_ℓ の角振動数 ω_ℓ を連続モードとする．以下で見るように，これは環境系にエネルギー散逸過程や位相緩和過程を記述させるため，すなわち熱浴の役割をさせるために必要な手続きである．このときは，ℓ に関する和を

$$\sum_{\ell} |g_\ell|^2 F(\omega_\ell) = \int_0^{\infty} d\omega\ \mathcal{D}(\omega)|g(\omega)|^2 F(\omega) \tag{7.1.22}$$

の関係により，ω 積分に置き換えればよい．ただし，角振動数が $\omega \sim \omega + d\omega$ の間にある調和振動子の数を $\mathcal{D}(\omega)d\omega$ とした．ところで，熱浴とは，エネルギー散逸や位相緩和を可能にする系ではあるが，「個性のない系」でなければならない．ここでいう「個性のない系」とは，注目系の角振動数 ω_0 周辺の熱浴系調和振動子の連続角振動数領域 $\omega_0 - \Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega$ の範囲では $\mathcal{D}(\omega)|g(\omega)|^2$ がほぼ一定と見なせること，すなわち，$\omega_0 - \Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega$ に対して

$$\mathcal{D}(\omega)|g(\omega)|^2 \approx \mathcal{D}(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 \tag{7.1.23}$$

の成立することを意味する．この領域以外では $D(\omega) = 0$ とする．ここで，

$$0 < \Delta\omega \ll \omega_0 \tag{7.1.24}$$

が成立しているものとする．$2\Delta\omega$ は熱浴モードの全バンド幅である*2．

バンド幅 $\Delta\omega$ の逆数は，熱浴モード間の相関時間の目安を与える時間である．

---

*2 もし，$\omega_0 - \Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega$ の $\mathcal{D}(\omega)|g(\omega)|^2$ にピークなどの個性がある場合には，そのモードの振動子を注目系の 1 つとして扱い，(7.1.23) を満たす個性のない残りのモードで熱浴を形成すべきである．

すなわち，その時間を τ_{R} と記すことにすると，

$$\tau_{\mathrm{R}} \approx \frac{\pi}{\Delta\omega} \tag{7.1.25}$$

となる．以下で導出する量子 Langevin 方程式が記述すべき時間 t のスケールは，

$$t \gg \tau_{\mathrm{R}} \tag{7.1.26}$$

の領域にあることが必要である．

回転系演算子 $\bar{a}(t)$ の時間変化を主に支配する (7.1.17) 右辺第 1 項

$$I = \sum_{\ell} |g_\ell|^2 \int_0^t ds\ \bar{a}(t-s)\mathrm{e}^{-i(\omega_\ell - \omega_0)s} \tag{7.1.27}$$

を，この連続モードの極限で評価してみよう．積分上限の時刻 t は，左辺の $d\bar{a}(t)/dt$ が有意の値をもつような時間，すなわち，(7.1.26) を満たす時間であるとする．そのとき，この項は，

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty d\omega'\ \mathcal{D}(\omega')|g(\omega')|^2 \int_0^t ds\ \bar{a}(t-s)\mathrm{e}^{-i(\omega'-\omega_0)s} \\
&= \int_0^t ds\ \bar{a}(t-s) \int_{-\omega_0}^\infty d\omega\ \mathcal{D}(\omega+\omega_0)|g(\omega+\omega_0)|^2 \mathrm{e}^{-i\omega s} \\
&\approx \mathcal{D}(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 \int_0^t ds\ \bar{a}(t-s) J(\Delta\omega, s)
\end{aligned} \tag{7.1.28}$$

と変形できる．第 1 等号では，ℓ の和を連続モードに対する積分に置き換えた．第 2 等号では，積分の順序を替え，同時に積分変数 ω' を $\omega = \omega' - \omega_0$ に変換した．第 3 等号では，熱浴であるための条件 (7.1.23) を採用し，新たな関数

$$J(\Delta\omega, t) = \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} d\omega\ \mathrm{e}^{-i\omega t} = 2\Delta\omega \frac{\sin(t\Delta\omega)}{t\Delta\omega} \tag{7.1.29}$$

を導入して用いた．$\Delta\omega = 10\pi\ \mathrm{sec}^{-1}$ の場合の $J(\Delta\omega, t)$ を，t sec の関数として図 7.1 に描いた．$\Delta\omega \to \infty$ の極限では，

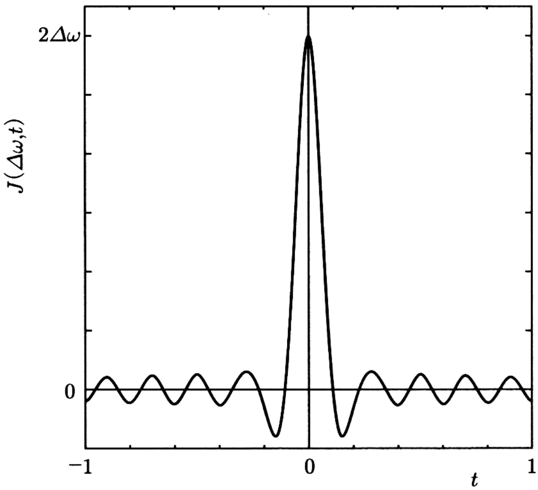


図 **7.1**　$\Delta\omega = 10\pi\ \mathrm{sec}^{-1}$ の場合の $J(\Delta\omega, t)$ の t 依存性.

$$J(\Delta\omega \to \infty, t) = 2\pi\delta(t) \tag{7.1.30}$$

である. $\delta(x)$ は **Dirac のデルタ関数**とよばれる超関数である[*3]. I の $\Delta\omega \to \infty$ での極限値は, (7.1.30) を (7.1.28) に代入して

$$\begin{aligned} I &\approx \mathcal{D}(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 \int_0^t ds\ \bar{a}(t-s) J(\Delta\omega \to \infty, s) \\ &= \kappa \bar{a}(t) \end{aligned} \tag{7.1.32}$$

と求まる. ただし, Dirac のデルタ関数にかかわる積分

---

*3　Dirac のデルタ関数は, 積分

$$\int_{a-\Delta_1}^{a+\Delta_2} dx\ \delta(x-a) f(x) = f(a), \quad \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \tag{7.1.31}$$

で定義される. $J(\Delta\omega, t)$ の $-\infty$ から ∞ までの t 積分が, $\Delta\omega \to \infty$ の極限では, $J(\Delta\omega, t)$ の縦軸切片 $(0,\ 2\Delta\omega)$ と, 原点に最も近い横軸上のゼロ点, $(-\pi/\Delta\omega,\ 0)$, $(\pi/\Delta\omega,\ 0)$ の 3 点を結んでできる三角形の面積と一致していることは興味深い.

$$\int_0^t ds\ \delta(s)F(t-s) = \frac{1}{2}F(t) \tag{7.1.33}$$

を実行し，

$$\kappa = \pi\mathcal{D}(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 \tag{7.1.34}$$

とおいた．κ は，連続無限個の調和振動子との相互作用のために，角振動数 ω_0 の振動子が被る緩和率である．(7.1.32) を (7.1.17) に用いると，

$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t) = -\kappa\bar{a}(t) - i\bar{R}^{\mathrm{I}}(t) \tag{7.1.35}$$

が得られる．

(7.1.32) でとった $\Delta\omega\to\infty$ の極限は，(7.1.24) との関係で注意を要する．熱浴バンド幅 $\Delta\omega$ は ω_0 より広くできないので，実際には極限 $\Delta\omega\to\infty$ をとることはできない．それでもこの極限をとる物理的な理由は，τ_{R} 程度以下の時間に起こる速い現象は見ないという「時間の粗視化」を取り入れているのである．この粗視化では，熱浴モード間の相関時間 τ_{R} がゼロと見える（以下の (7.1.40)-(7.1.42) を参照のこと）．

(7.1.35) の乱雑平均をとると，

$$\frac{d}{dt}\langle\bar{a}(t)\rangle_{\mathrm{R}} = -\kappa\langle\bar{a}(t)\rangle_{\mathrm{R}} \tag{7.1.36}$$

となる．ただし，(7.1.21) を使った．これを解いて，$|\langle\bar{a}(t)\rangle_{\mathrm{R}}| = |\langle\bar{a}(0)\rangle_{\mathrm{R}}|\mathrm{e}^{-\kappa t}$ を得る．これは，実験室系では $|\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}}| = |\langle a(0)\rangle_{\mathrm{R}}|\mathrm{e}^{-\kappa t}$ となる．これより，

$$\tau = \frac{1}{\kappa} \tag{7.1.37}$$

は，$\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}}$ の絶対値振幅の緩和時間であることがわかる．乱雑平均をとっているので，この緩和時間は巨視的な物理量の特徴的な時間スケールを与えるものと解釈できる．したがって，量子 Langevin 方程式の導出で問題にしている時間 t とは，

$$\tau \gg t \tag{7.1.38}$$

の関係にある．(7.1.26) とあわせると，量子 Langevin 方程式が記述する現象は，その時間変化のスケール t が

$$\tau \gg t \gg \tau_{\mathrm{R}} \tag{7.1.39}$$

を満たすものであることがわかる*4．

交換関係 (7.1.18) を連続モードおよび $\Delta\omega \to \infty$ の極限で評価すると，

$$\begin{aligned}
[\bar{R}^{\mathrm{I}}(t),\ \bar{R}^{\mathrm{I}}(t')^{\dagger}] &= \int_0^{\infty} d\omega' \mathcal{D}(\omega')|g(\omega')|^2 \mathrm{e}^{-i(\omega'-\omega_0)(t-t')} \\
&= \int_{-\omega_0}^{\infty} d\omega\ \mathcal{D}(\omega+\omega_0)|g(\omega+\omega_0)|^2 \mathrm{e}^{-i\omega(t-t')} \\
&\approx \mathcal{D}(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 J(\Delta\omega, t-t') \\
&\approx \mathcal{D}(\omega_0)|g(\omega_0)|^2 J(\Delta\omega \to \infty, t-t') \\
&= 2\kappa\delta(t-t')
\end{aligned} \tag{7.1.40}$$

となる．第 2 等号では，積分変数の変換 $\omega = \omega' - \omega_0$ を行った．第 3 等号では，熱浴モードの仮定 (7.1.23) を採用し，(7.1.29) で導入された $J(\Delta\omega, t)$ を利用した．第 4 等号では，時間の粗視化を実行した．最後の等号にて (7.1.30) を代入し，(7.1.34) を用いた．2 次モーメント (7.1.19), (7.1.20) を同様にして連続モードの極限で評価すると，それぞれ，

$$\left\langle \bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\bar{R}^{\mathrm{I}}(t')^{\dagger} \right\rangle_{\mathrm{R}} = 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-t'), \tag{7.1.41}$$

$$\left\langle \bar{R}^{\mathrm{I}}(t')^{\dagger}\bar{R}^{\mathrm{I}}(t) \right\rangle_{\mathrm{R}} = 2\kappa\bar{n}\delta(t-t') \tag{7.1.42}$$

となる．ただし，

---

*4　この関係を満たす時間 t がとれない系では，ここで扱うような Markov 的（量子）Langevin 方程式による記述は不向きである．

$$\bar{n} = \bar{n}(\omega_0) = \frac{1}{e^{\omega_0/T} - 1} \tag{7.1.43}$$

とおいた.

以上, (7.1.35), (7.1.40)-(7.1.42) の結果を回転系から実験室系に戻すと, 結局, S. & L. Langevin 方程式

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) - \kappa a(t) - iR^{\mathrm{I}}(t), \tag{7.1.44}$$

$$[R^{\mathrm{I}}(t),\ R^{\mathrm{I}}(t')^\dagger] = 2\kappa\delta(t-t'), \tag{7.1.45}$$

$$\left\langle R^{\mathrm{I}}(t)R^{\mathrm{I}}(t')^\dagger \right\rangle_{\mathrm{R}} = 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-t'), \tag{7.1.46}$$

$$\left\langle R^{\mathrm{I}}(t')^\dagger R^{\mathrm{I}}(t) \right\rangle_{\mathrm{R}} = 2\kappa\bar{n}\delta(t-t') \tag{7.1.47}$$

を得る. 1 次モーメントについては, (7.1.21) より,

$$\langle R^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}} = 0, \quad \langle R^{\mathrm{I}}(t)^\dagger\rangle_{\mathrm{R}} = 0 \tag{7.1.48}$$

である. なお, (7.1.45)-(7.1.47) で, Dirac のデルタ関数の性質 $x\delta(x) = 0$ を利用した.

7.1.4 演算子積に対する量子 Langevin 方程式

演算子積 $a^\dagger(t)a(t)$ に対する量子 Langevin 方程式を導き出してみよう. Heisenberg 方程式 (7.1.8) を利用すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(a^\dagger(t)a(t)\right) &= \frac{da^\dagger(t)}{dt}a(t) + a^\dagger(t)\frac{da(t)}{dt} \\ &= -ia^\dagger(t)R(t) + iR(t)^\dagger a(t) \end{aligned} \tag{7.1.49}$$

を得る. これを, 回転系で記すと,

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t)\right) = -i\bar{a}^\dagger(t)\bar{R}(t) + i\bar{R}(t)^\dagger\bar{a}(t) \tag{7.1.50}$$

となる. ところで, (7.1.10) を (7.1.12) に代入し, それを回転系の演算子で書き

直すと，

$$\bar{R}(t) = \bar{R}^{\mathrm{I}}(t) - iI \approx \bar{R}^{\mathrm{I}}(t) - i\kappa\bar{a}(t) \tag{7.1.51}$$

が得られる．ただし，I は (7.1.27) で与えられる．第 2 等号では (7.1.32) を用いた．(7.1.51) を (7.1.50) に代入すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t)\right) = -2\kappa\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t) - i\bar{a}^\dagger(t)\bar{R}^{\mathrm{I}}(t) + i\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)^\dagger\bar{a}(t) \tag{7.1.52}$$

となる．

(7.1.52) を回転系から実験室系に戻すと，演算子積 $a^\dagger(t)a(t)$ に対する量子 Langevin 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(a^\dagger(t)a(t)\right) = -2\kappa a^\dagger(t)a(t) - ia^\dagger(t)R^{\mathrm{I}}(t) + iR^{\mathrm{I}}(t)^\dagger a(t) \tag{7.1.53}$$

を得る．

(7.1.52) や (7.1.53) の右辺第 2 項，第 3 項には，注目系の演算子と乱雑力演算子との積がある．このような項の扱いには注意を要する．(7.1.52) の乱雑平均 $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{R}}$ をとることにより調べてみよう．

7.1.5 $\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_{\mathrm{R}}$ の満たす微分方程式

ここで，新しい演算子 $\mathcal{A}(t)$ を

$$\bar{a}(t) = \mathcal{A}(t)\mathrm{e}^{-\kappa t} \tag{7.1.54}$$

にて導入すると，(7.1.35) は $\mathcal{A}(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = -i\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\mathrm{e}^{\kappa t} \tag{7.1.55}$$

と書き直せる．これを初期条件 $\mathcal{A}(0) = \bar{a}(0) = a$ の下に解くと，

$$\mathcal{A}(t) = a - i\int_0^t ds\ \bar{R}^{\mathrm{I}}(s)\mathrm{e}^{\kappa s} \tag{7.1.56}$$

となり，(7.1.54) に代入して，

$$\bar{a}(t) = a\mathrm{e}^{-\kappa t} - i\int_0^t ds\ \bar{R}^{\mathrm{I}}(s)\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)} \tag{7.1.57}$$

を得る．このエルミート共役をとると，

$$\bar{a}^\dagger(t) = a^\dagger\mathrm{e}^{-\kappa t} + i\int_0^t ds\ \bar{R}^{\mathrm{I}}(s)^\dagger\mathrm{e}^{-\kappa(t-s)} \tag{7.1.58}$$

である．

(7.1.58) の右から乱雑力演算子 $\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)$ をかけて乱雑平均をとると，

$$\begin{aligned}\langle\bar{a}^\dagger(t)\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}} &= a^\dagger\mathrm{e}^{\kappa t}\langle\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}} + i\int_0^t ds\ \langle\bar{R}^{\mathrm{I}}(s)^\dagger\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\kappa(t-s)}\\ &= i\kappa\bar{n}\end{aligned} \tag{7.1.59}$$

となる．第 2 等号では，第 1 項に (7.1.21) を用い，第 2 項に (7.1.42) を代入して Dirac のデルタ関数にかかわる積分 (7.1.33) と同様の積分を実行した．(7.1.59) の複素共役をとると，

$$\langle\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)^\dagger\bar{a}(t)\rangle_{\mathrm{R}} = \langle\bar{a}^\dagger(t)\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}}^* = -i\kappa\bar{n} \tag{7.1.60}$$

が得られる．同様にして，

$$\langle\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)\bar{a}^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}} = i\kappa\,(1+\bar{n})\,, \tag{7.1.61}$$

$$\langle\bar{a}(t)\bar{R}^{\mathrm{I}}(t)^\dagger\rangle_{\mathrm{R}} = -i\kappa\,(1+\bar{n}) \tag{7.1.62}$$

が導かれる．

回転系での量子 Langevin 方程式 (7.1.52) の乱雑平均をとり，右辺第 2 項，第 3 項に，それぞれ，(7.1.59), (7.1.60) を代入すると，

$$\frac{d}{dt}\langle\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t)\rangle_{\mathrm{R}} = -2\kappa\left(\langle\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t)\rangle_{\mathrm{R}} - \bar{n}\right) \tag{7.1.63}$$

を得る．これを実験室系に戻して記すと，

$$\frac{d}{dt}\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_{\mathrm{R}} = -2\kappa\left(\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_{\mathrm{R}} - \bar{n}\right) \tag{7.1.64}$$

となる．また，(7.1.59)-(7.1.62) は，実験室系では，それぞれ

$$\langle a^\dagger(t)R^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}} = i\kappa\bar{n}, \qquad \langle R^{\mathrm{I}}(t)^\dagger a(t)\rangle_{\mathrm{R}} = -i\kappa\bar{n}, \tag{7.1.65}$$

$$\langle R^{\mathrm{I}}(t)a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}} = i\kappa\,(1+\bar{n})\,, \qquad \langle a(t)R^{\mathrm{I}}(t)^\dagger\rangle_{\mathrm{R}} = -i\kappa\,(1+\bar{n}) \tag{7.1.66}$$

となる．

乱雑平均 $\langle\cdots\rangle_{\mathrm{R}}$ に加えて，量子力学的期待値 $\langle\cdots\rangle$ をとり，一粒子分布関数

$$n(t) = \langle\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_{\mathrm{R}}\rangle \tag{7.1.67}$$

を導入すると，(7.1.64) より，

$$\frac{d}{dt}n(t) = -2\kappa\,[n(t)-\bar{n}] \tag{7.1.68}$$

が得られる．これは，ここで扱っている系に対する Boltzmann 方程式である．

7.1.6 S. & L. Langevin 方程式の検証

乱雑力を通して熱浴とのやり取りを記述する S. & L. Langevin 方程式の下で，量子系の演算子代数の規範を成す正準交換関係 (7.1.4) 第 1 式が，はたしていかなる時間発展をするのかを検証してみよう．

同時刻正準交換関係 $[a(t),\ a^\dagger(t)]$ の時間微分を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[a(t),\ a^\dagger(t)] &= \left[\frac{da(t)}{dt},\ a^\dagger(t)\right] + \left[a(t),\ \frac{da^\dagger(t)}{dt}\right]\\ &= -2\kappa[a(t),\ a^\dagger(t)] - i[R^{\mathrm{I}}(t),\ a^\dagger(t)] + i[a(t),\ R^{\mathrm{I}}(t)^\dagger]\\ &\overset{w}{=} -2\kappa[a(t),\ a^\dagger(t)] + 2\kappa\end{aligned} \tag{7.1.69}$$

となることがわかる．第 2 等号では，S. & L. Langevin 方程式 (7.1.44) とそのエルミート共役を代入し，残る項だけを記した．ところで，(7.1.65), (7.1.66) より，

$$\langle [R^{\mathrm{I}}(t),\ a^{\dagger}(t)] \rangle_{\mathrm{R}} = i\kappa, \quad \langle [a(t),\ R^{\mathrm{I}}(t)^{\dagger}] \rangle_{\mathrm{R}} = -i\kappa \tag{7.1.70}$$

を得る．乱雑平均をとって得られたこの関係式を，演算子の関係式として

$$[R^{\mathrm{I}}(t),\ a^{\dagger}(t)] \overset{w}{=} i\kappa, \quad [a(t),\ R^{\mathrm{I}}(t)^{\dagger}] \overset{w}{=} -i\kappa \tag{7.1.71}$$

と記す．ただし，弱い等号 $\overset{w}{=}$ は，乱雑平均 $\langle \cdots \rangle_{\mathrm{R}}$ をとることを念頭においた演算子間の弱い関係（weak relation）で，$\langle \cdots \rangle_{\mathrm{R}}$ をとると落ちる項を除いてあることを意味する*5．(7.1.69) の最後の等号では，(7.1.71) を代入した．

(7.1.69) を解くと，

$$[a(t),\ a^{\dagger}(t)] = 1 + \left([a,\ a^{\dagger}] - 1\right) \mathrm{e}^{-2\kappa t} = 1 \tag{7.1.72}$$

となる．第 2 等号では，初期時刻 $t=0$ で正準交換関係 (7.1.4) 第 1 式が成立していることを用いた．これより，S. & L. Langevin 方程式の記述する系では，乱雑力下の散逸的時間発展であるにもかかわらず，各時刻で正準交換関係 (7.1.72) の成立していることがわかる．

7.2 量子 Brown 運動への移行

前節では，いかにして，微視的な Heisenberg 方程式から S. & L. Langevin 方程式を導出するかを調べた．その際，出発点では通常の時間微分が許される演算子であったものが，環境系の演算子を乱雑力演算子へと移行させるのに伴って，演算子の時間微分が定義不能となることをまったく考慮しなかった．実は，時間微分表記を使った S. & L. Langevin 方程式 (7.1.44) や (7.1.53) は，演算子の変化量（差分量）

$$da(t) = a(t+dt) - a(t) \tag{7.2.73}$$

などに対する方程式（確率微分方程式）

*5　弱い関係式については，7.3 節参照のこと．

$$da(t) = -i\omega a(t)dt - \kappa a(t)dt + \sqrt{2\kappa}dB_t, \tag{7.2.74}$$

$$d\left(a^\dagger(t)a(t)\right) = -2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt \ + \sqrt{2\kappa}a^\dagger(t)dB_t + \sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger a(t) \tag{7.2.75}$$

と記すべきものである．ここで，前項までの手続きで得られた相互作用表示での乱雑力演算子 $R^{\mathrm{I}}(t)$, $R^{\mathrm{I}}(t)^\dagger$ のかわりに，

$$dB_t = -\frac{i}{\sqrt{2\kappa}}R^{\mathrm{I}}(t)dt, \quad dB_t^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2\kappa}}R^{\mathrm{I}}(t)^\dagger dt \tag{7.2.76}$$

により，乱雑力の変化量を表す新しい演算子 dB_t，$dB_t^\dagger$ を導入して使用した．この演算子を使用すると，(7.1.45) は

$$[dB_t, \ dB_{t'}^\dagger] = \delta(t-t')dtdt' \tag{7.2.77}$$

と記される．これより，dB_t と $dB_t^\dagger$ の積分

$$B_t = \int_0^t dB_{t'}, \quad B_t^\dagger = \int_0^t dB_{t'}^\dagger \tag{7.2.78}$$

が，

$$\begin{aligned}
[B_t, \ B_{t'}^\dagger] &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2 \ \delta(t_1 - t_2) \\
&= \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \ \theta(t-t_1)\theta(t'-t_2)\delta(t_1-t_2) \\
&= \int_0^\infty dt_1 \ \theta(t-t_1)\theta(t'-t_1) \\
&= \min(t, t')
\end{aligned} \tag{7.2.79}$$

を満たしていることがわかる．この性質をもつ演算子 B_t と $B_t^\dagger$ は，**量子 Brown 運動**とよばれる．量子 Brown 運動 B_t, $B_t^\dagger$ はいたるところで時間に関して微分不可能なので，その時間微分で与えられる乱雑力 $R^{\mathrm{I}}(t)$ や $R^{\mathrm{I}}(t)^\dagger$ は存在しないのである．

量子 Brown 運動を用いて，差分量演算子 $\varDelta B_t$, $\varDelta B_t^\dagger$ を

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t = \int_{B_t}^{B_{t+\Delta t}} dB_{t'},$$
$$\Delta B_t^\dagger = B_{t+\Delta t}^\dagger - B_t^\dagger = \int_{B_t^\dagger}^{B_{t+\Delta t}^\dagger} dB_{t'}^\dagger \tag{7.2.80}$$

で定義する．差分量演算子の同時刻交換関係は，(7.2.80) より，

$$\begin{aligned}[\Delta B_t,\ \Delta B_t^\dagger] &= \left[\int_{B_t}^{B_{t+\Delta t}} dB_{t_1},\ \int_{B_t}^{B_{t+\Delta t}} dB_{t_2}\right] \\ &= \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t+\Delta t} dt_2 \delta(t_1 - t_2) = \Delta t\end{aligned} \tag{7.2.81}$$

と求まる．ここで，便宜上，Δt を dt と記すことにすると*6，(7.2.81) は

$$[dB_t,\ dB_t^\dagger] = dt \tag{7.2.82}$$

となる．同様にして，(7.1.46), (7.1.47) より，

$$\left\langle dB_t\ dB_t^\dagger \right\rangle_{\mathrm{R}} = (\bar{n}+1)dt, \qquad \left\langle dB_t^\dagger\ dB_t \right\rangle_{\mathrm{R}} = \bar{n}dt \tag{7.2.83}$$

および，その弱い関係式

$$dB_t\ dB_t^\dagger \overset{w}{=} (\bar{n}+1)dt, \qquad dB_t^\dagger\ dB_t \overset{w}{=} \bar{n}dt \tag{7.2.84}$$

を得る．

さて，差分量演算子を使用すると，(7.1.65), (7.1.66) は，それぞれ，

$$\langle a^\dagger(t) \circ dB_t \rangle_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\bar{n}dt, \qquad \langle dB_t^\dagger \circ a(t) \rangle_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\bar{n}dt, \tag{7.2.85}$$
$$\langle dB_t \circ a^\dagger(t) \rangle_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,(1+\bar{n})\,dt, \qquad \langle a(t) \circ dB_t^\dagger \rangle_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,(1+\bar{n})\,dt \tag{7.2.86}$$

と記されるべきものである．ただし，“∘” は，演算子と差分量演算子との積を，

*6　くわしくは，7.3 節参照のこと．

Stratonovich 型確率積 [73]

$$a^\dagger(t)\circ dB_t = \frac{a^\dagger(t+dt)+a^\dagger(t)}{2}dB_t \tag{7.2.87}$$

などと解釈すべきことを示す記号である．確率積を指定した形式で (7.2.75) を書き直すと，

$$d\left(a^\dagger(t)a(t)\right) = -2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt\ +\sqrt{2\kappa}a^\dagger(t)\circ dB_t + \sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger\circ a(t) \tag{7.2.88}$$

となる．

Stratonovich 型確率積は，伊藤型確率積 [74]

$$a^\dagger(t)\cdot dB_t = a^\dagger(t)dB_t \tag{7.2.89}$$

と対比されるものである．ただし，“·” は積が伊藤型であることを示す記号である．伊藤型確率積では，時刻 t より未来の乱雑力 dB_t や $dB_t^\dagger$ が現在の演算子 $a^\dagger(t)$, $a(t)$ に影響を与えることがないので，

$$\langle a^\dagger(t)\cdot dB_t\rangle_{\mathrm{R}} = 0, \quad \langle dB_t^\dagger\cdot a(t)\rangle_{\mathrm{R}} = 0 \tag{7.2.90}$$

となる．その定義 (7.2.87), (7.2.89) より，Stratonovich 型確率積と伊藤型確率積の間には，

$$\begin{aligned} a^\dagger(t)\circ dB_t &= a^\dagger(t)dB_t + \frac{a^\dagger(t+dt)-a^\dagger(t)}{2}dB_t \\ &= a^\dagger(t)\cdot dB_t + \frac{1}{2}da^\dagger(t)dB_t \end{aligned} \tag{7.2.91}$$

なる変換公式の成立することがわかる（付録 A.7 節参照）．

乱雑力を有するいわゆる Langevin 方程式は，そもそも物理学者によって導入された．その際，前節での扱いと同様に，解析関数に許される計算方法を使用していた．先にも述べたように，乱雑力の影響下にある系の粒子の運動では，その軌道はいたるところで時間微分が不可能である．したがって，物理学者による Langevin 方程式の扱いは，数学的にはまったく保証されないものであった．そのような状

況で，古典確率微分方程式の体系の数学的確立が，伊藤清 [74] によって成された．そこでは，確率過程の計算においては，解析関数に対する計算には現れない $\mathcal{O}(\sqrt{dt})$ の項を適切に扱うべきことが示された．そのため，確率関数（量子系では確率演算子）の積の微分は (7.1.49) 第 1 等号では与えられず，余分な項が現れる（後出の (7.3.110) 参照）．それから 20 年以上経って，Stratonovich [73] により，物理学者が当初から採用していた解析関数に対する計算方法でも，確率微分方程式が適切に扱えることが示された．同時に，確率関数の積の微分も，解析関数の場合と同じ (7.1.49) 第 1 等号で与えられることも示された．それが，前節での Langevin 方程式の導出で Stratonovich 型確率積が自然に現れた理由である．

7.3 量子 Brown 運動と確率積

7.3.1 量子 Brown 運動

時刻 $t \geq 0$ に対する演算子

$$B_t = \int_0^t dt'\ b_{t'}, \quad B_t^\dagger = \int_0^t dt'\ b_{t'}^\dagger \tag{7.3.92}$$

を導入する．生成・消滅演算子 $b_t^\dagger$, b_t は正準交換関係：

$$[b_t,\ b_{t'}^\dagger] = \delta(t-t') \tag{7.3.93}$$

を満たし，真空 $|0)$ と $(0|$ が，

$$b_t|0) = 0, \quad (0|b_t^\dagger = 0 \tag{7.3.94}$$

で定義されるものとする*7．ここでは，絶対零度の環境系 ($\bar{n} = 0$) を記述する量子 Brown 運動を考察する．有限温度の熱的量子 Brown 運動については，9.2 節で改めて扱う．

定義 (7.3.92) より，

*7 飛田 [75]，尾畑 [76, 77] らにより，演算子 b_t と $b_t^\dagger$ は量子白色雑音として定義され，その存在が保証されている．

$$B_{t=0}=0, \quad B^\dagger_{t=0}=0 \tag{7.3.95}$$

である．また，

$$\begin{aligned}
[B_t,\ B^\dagger_{t'}] &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2\ [b_{t_1},\ b^\dagger_{t_2}] = \int_0^t dt_1 \int_0^{t'} dt_2\ \delta(t_1-t_2) \\
&= \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2\ \theta(t-t_1)\theta(t'-t_2)\delta(t_1-t_2) \\
&= \int_0^\infty dt_1 \theta(t-t_1)\theta(t'-t_1) = \min(t,t')
\end{aligned} \tag{7.3.96}$$

を満たしていることがわかる．これは，(7.2.80) と同一の関係式で，B_t と $B^\dagger_t$ が量子 Brown 運動を表現する演算子であることを示している [78, 79].

ここで，$\Delta t > 0$ として，差分

$$\begin{aligned}
\Delta B_t &= B_{t+\Delta t} - B_t = \int_t^{t+\Delta t} dt'\ b_{t'}, \\
\Delta B^\dagger_t &= B^\dagger_{t+\Delta t} - B^\dagger_t = \int_t^{t+\Delta t} dt'\ b^\dagger_{t'}
\end{aligned} \tag{7.3.97}$$

を考える．これらは，差分に関する交換関係

$$[\Delta B_t,\ \Delta B^\dagger_t] = \Delta t \tag{7.3.98}$$

を満たす．このことは，

$$\begin{aligned}
\Delta B_t \Delta B^\dagger_t &= B_{t+\Delta} B^\dagger_{t+\Delta} + B_t B^\dagger_t - B_{t+\Delta} B^\dagger_t - B_t B^\dagger_{t+\Delta} \\
&= B^\dagger_{t+\Delta} B_{t+\Delta} + (t+\Delta t) + B^\dagger_t B_t + t \\
&\quad - B^\dagger_t B_{t+\Delta} - t - B^\dagger_{t+\Delta} B_t - t \\
&= \Delta B^\dagger_t \Delta B_t + \Delta t
\end{aligned} \tag{7.3.99}$$

と証明できる．ただし，第 2 等号で，(7.3.96) を利用した．(7.3.99) は，以下のように証明することもできる．

$$
\begin{aligned}
\Delta B_t \Delta B_t^\dagger &= \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t+\Delta t} dt_2 \; b_{t_1} b_{t_2}^\dagger \\
&= \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t+\Delta t} dt_2 \left\{ b_{t_2}^\dagger b_{t_1} + [b_{t_1},\; b_{t_2}^\dagger] \right\} \\
&= \Delta B_t^\dagger \Delta B_t + \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t+\Delta t} dt_2 \; \delta(t_1 - t_2) \\
&= \Delta B_t^\dagger \Delta B_t + \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \\
&= \Delta B_t^\dagger \Delta B_t + \Delta t.
\end{aligned} \tag{7.3.100}
$$

ただし，第 3 等号で (7.3.93) を用いた．

7.3.2 微分形式表記法と伊藤型確率積

ここで，

$$
\Delta B_t = \int_t^{t+\Delta t} dB_{t'}, \quad \Delta B_t^\dagger = \int_t^{t+\Delta t} dB_{t'}^\dagger \tag{7.3.101}
$$

なる表記を導入する．(7.3.92) と比較すると，

$$
dB_t = b_t dt, \quad dB_t^\dagger = b_t^\dagger dt \tag{7.3.102}
$$

となる（脚注 7 により，この表記法が保証される）．

$t \geq 0$ に対する確率積分

$$
I_t = \int_0^t \left\{ dB_{t'}^\dagger F_{t'} + G_{t'} dB_{t'} + H_{t'} dt' \right\}, \quad I_{t=0} = 0 \tag{7.3.103}
$$

が存在するとき，

$$
I_t = \int_0^t dI_{t'} \tag{7.3.104}
$$

と表記し，微分形式

$$dI_t = dB_t^\dagger F_t + G_t dB_t + H_t dt \tag{7.3.105}$$

を導入する．

このとき，

$$I_t^{(i)} = \int_0^t dI_{t'}^{(i)}, \quad I_t^{(i)} = 0, \tag{7.3.106}$$

$$dI_t^{(i)} = \left\{ dB_t^\dagger F_t^{(i)} + G_t^{(i)} dB_t + H_t^{(i)} dt \right\} \tag{7.3.107}$$

$(i = 1, 2)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\Delta(I_t^{(1)} I_t^{(2)}) &= \left(\int_0^{t+\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} - \int_0^t \int_0^t \right) dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= \left(\int_0^{t+\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} - \int_0^{t+\Delta t} \int_0^t + \int_0^{t+\Delta t} \int_0^t - \int_0^t \int_0^t \right) dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= \left(\int_0^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t} \int_0^t \right) dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= \left(\int_t^{t+dt} \int_0^t + \int_0^t \int_t^{t+dt} + \int_t^{t+dt} \int_t^{t+dt} \right) dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= \Delta I_t^{(1)} I_t^{(2)} + I_t^{(1)} \Delta I_t^{(2)} + \Delta I_t^{(1)} \Delta I_t^{(2)}
\end{aligned} \tag{7.3.108}$$

が示される*8.

あくまでも時間差 Δt の差分 $\Delta I_t^{(i)}$ を扱っているのであるが，以下，これらを

$$\Delta t \to dt, \quad \Delta I_t^{(i)} \to dI_t^{(i)} \tag{7.3.109}$$

と微分形式で表記することにする．この表記法によると，(7.3.108) は，

$$d(I_t^{(1)} I_t^{(2)}) = dI_t^{(1)} I_t^{(2)} + I_t^{(1)} dI_t^{(2)} + dI_t^{(1)} dI_t^{(2)} \tag{7.3.110}$$

---

*8 演算子にかかわる関係式 (7.3.108) などは，たとえば，指数ベクトル $|f) = \exp[\int_0^\infty dt f(t) b_t^\dagger]|0)$，$(g| = (0|\exp[\int_0^\infty dt g(t)^* b_t]$ による表現を用いて証明されるべきものである．ただし，$f(t)$, $g(t)$ は c-数複素関数である．

となる．これは，伊藤型確率積 [74] とよばれる．

なお，この微分形式による表記法では，差分に関する交換関係 (7.3.98) は，

$$[dB_t,\ dB_t^\dagger] = dt \tag{7.3.111}$$

と記されることになる．交換関係 (7.3.111) の (7.3.98) に相当する導出は，この表記法では，

$$[b_t,\ b_t^\dagger] = \frac{1}{dt} \tag{7.3.112}$$

と解釈して，

$$[dB_t,\ dB_t^\dagger] = (dt)^2[b_t,\ b_t^\dagger] = dt \tag{7.3.113}$$

とすることになろう．

7.3.3 弱い関係

真空の定義 (7.3.94) を微分形式で書くと

$$dB_t|0) = 0, \quad (0|dB_t^\dagger = 0 \tag{7.3.114}$$

となる．これより

$$(0|dB_t|0) = 0, \qquad (0|dB_t^\dagger|0) = 0, \tag{7.3.115}$$

$$(0|dB_t dB_t|0) = 0, \qquad (0|dB_t^\dagger dB_t^\dagger|0) = 0, \tag{7.3.116}$$

$$(0|dB_t^\dagger dB_t|0) = 0 \tag{7.3.117}$$

が得られる．(7.3.111) の真空期待値に (7.3.117) を用いると，

$$(0|dB_t dB_t^\dagger|0) = dt \tag{7.3.118}$$

を得る．

微分形式の量子 Brown 運動の 2 次モーメント (7.3.116)-(7.3.118) を，今後，真

空期待値 $(0|\cdots|0)$ をとることを念頭において，演算子の積に関する弱い関係

$$dB_t dB_t \overset{w}{=} 0, \quad dB_t^\dagger dB_t^\dagger \overset{w}{=} 0, \quad dB_t^\dagger dB_t \overset{w}{=} 0, \tag{7.3.119}$$

$$dB_t dB_t^\dagger \overset{w}{=} dt \tag{7.3.120}$$

と記すことにする．ここで，弱い関係であることを示す記号 $\overset{w}{=}$ を導入した．これは，真空期待値 $(0|\cdots|0)$ をとると落ちる項が省略されていることを意味する*9.

弱い関係として (7.3.110) を書き下すと，

$$d(I_t^{(1)} I_t^{(2)}) \overset{w}{=} dB_t^\dagger \left(F_t^{(1)} I_t^{(2)} + I_t^{(1)} F_t^{(2)}\right) + \left(G_t^{(1)} I_t^{(2)} + I_t^{(1)} G_t^{(2)}\right) dB_t$$
$$+ \left(H_t^{(1)} I_t^{(2)} + I_t^{(1)} H_t^{(2)} + G_t^{(1)} F_t^{(2)}\right) dt \tag{7.3.121}$$

が得られる．導出に当たって，弱い関係 (7.3.119),(7.3.120) を用いた．

7.3.4 量子 Brown 運動のモデル

第 2 章では，入射粒子がボソン系の検出器と次々と相互作用するボソン検出器 (BD) 模型を扱った．検出器が連続的におかれると，その入射粒子への作用は，量子 Brown 運動となる．

(2.2.56) は，

$$\langle x|V(t)|x\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{2}\left[A_t^{(N)} + A_t^{(N)\dagger}\right]\right\}, \quad q|x\rangle = x|x\rangle, \tag{7.3.122}$$

$$A_t^{(N)} = \sum_{j=1}^{N} \Theta_j(t)\ a_j, \quad A_t^{(N)\dagger} = \sum_{j=1}^{N} \Theta_j(t)\ a_j^\dagger, \tag{7.3.123}$$

$$\Theta_j(t) = \frac{1}{v}\int_0^{x(t)} dx\ \Omega_j(x - x_j) \tag{7.3.124}$$

とかける．ただし，$x(t)$ は時刻 t の入射粒子の位置である．時間の原点を調整して，入射粒子は，時刻 $t=0$ に座標原点を通過するものとした $(x(0)=x=0)$. v は入射粒子の速さである．N 個の検出器が，それぞれ，位置 $x_j(j=1,2,\cdots,N)$ に等間隔 $\Delta x(=d)$ で配置されている．生成・消滅演算子 $a_j^\dagger$，a_j は，正準交換関係

*9 弱い関係式は，古典確率論の体系における確率収束の下での表式に当たる．

$$[a_j,\ a_k^\dagger] = \delta_{jk} \tag{7.3.125}$$

を満たし，真空 $|0)$ と $(0|$ が，

$$a_j|0) = 0\ ,\ \ (0|a_k^\dagger = 0 \tag{7.3.126}$$

で定義されるものとする．

ここで，入射粒子と検出器の相互作用範囲が，検出器間距離 Δx に比べてたいへん短いと仮定して，

$$\Omega_j(x - x_j) = \Omega\Delta x\ \delta(x - x_j) \tag{7.3.127}$$

とおくことにする．このとき，(7.3.124) は，

$$\Theta_j(t) = \frac{\Omega\Delta x}{v}\int_0^{x(t)} dx\ \delta(x - x_j) = \frac{\Omega\Delta x}{v}\ \theta(x(t) - x_j) \tag{7.3.128}$$

となる．(7.3.128) を (7.3.123) に代入すると，

$$A_t^{(N)} = \frac{\Omega\Delta x}{v}\sum_{j=1}^{N}\theta(x(t) - x_j)\ a_j, \tag{7.3.129}$$

$$A_t^{(N)\dagger} = \frac{\Omega\Delta x}{v}\sum_{j=1}^{N}\theta(x(t) - x_j)\ a_j^\dagger \tag{7.3.130}$$

となる．

さて，検出器を，連続的に配置するとしよう．その際，

$$(\Delta x)^2 = D\Delta t, \quad a_j = \sqrt{\Delta t}\ a_{t_j} \tag{7.3.131}$$

なる翻訳をあわせて行う*10．すなわち，

*10　D は自己拡散係数に当たる量である．

$$\begin{aligned} A_t &= \lim_{N\to\infty} A_t^{(N)} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{\Omega\sqrt{D}}{v}\Delta t\sum_{j=1}^{N}\theta(x(t)-x_j)\ a_{t_j} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{\Omega\sqrt{D}}{v}\Delta t\sum_{j=1}^{N}\theta(t-t_j)\ a_{t_j} \\ &= \frac{\Omega\sqrt{D}}{v}\int_0^{t_{\max}} dt'\ \theta(t-t')\ a_{t'} \end{aligned} \tag{7.3.132}$$

を得る．ただし，t_j は，入射粒子が x_j におかれた j 番目の検出器を通過する時刻を表す．$t_{\max}$ は，入射粒子が検出器の配置されている領域を通り過ぎるのにかかる時間である．同様にして，

$$\begin{aligned} A_t^\dagger &= \lim_{N\to\infty} A_t^{(N)\dagger} \\ &= \frac{\Omega\sqrt{D}}{v}\int_0^{t_{\max}} dt'\ \theta(t-t')\ a_{t'}^\dagger \end{aligned} \tag{7.3.133}$$

を得る．生成・消滅演算子 $a_t^\dagger$, a_t は正準交換関係

$$[a_t,\ a_s^\dagger] = \delta(t-s) \tag{7.3.134}$$

を満たす．

A_t と $A_t^\dagger$ の交換関係は，

$$\begin{aligned} [A_t,\ A_s^\dagger] &= \frac{\Omega^2 D}{v^2}\int_0^{t_{\max}} dt'\int_0^{t_{\max}} dt''\theta(t-t')\theta(s-t'')\ [a_{t'},\ a_{t''}^\dagger] \\ &= \frac{\Omega^2 D}{v^2}\int_0^{t_{\max}} dt'\int_0^{t_{\max}} dt''\theta(t-t')\theta(s-t'')\ \delta(t'-t'') \\ &= \frac{\Omega^2 D}{v^2}\int_0^{t_{\max}} dt'\int_0^{t_{\max}} dt''\theta(t-t')\theta(s-t') \\ &= \frac{\Omega^2 D}{v^2}\min(t,s) \end{aligned} \tag{7.3.135}$$

となる．これを (7.3.96) と比較すると，演算子 A_t と $A_t^\dagger$ は，それぞれ，量子 Brown 運動 B_t, $B_t^\dagger$ と，

$$A_t = \frac{\Omega\sqrt{D}}{v} B_t, \quad A_t^\dagger = \frac{\Omega\sqrt{D}}{v} B_t^\dagger \tag{7.3.136}$$

の関係にあることがわかる.

7.4 S-H Langevin 方程式の導出

この節では，柴田・橋爪の原論文 [70] の手法に沿った量子系の Langevin 方程式（S-H Langevin 方程式）の導出を紹介する（3.3-3.5 節参照).

7.4.1 式変形の一般的手法

ある演算子 X が従う Heisenberg 方程式

$$\frac{d}{dt}X(t) = i[H,\ X(t)] \equiv iLX(t), \tag{7.4.137}$$

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = H_{\rm S} + H_{\rm R} \tag{7.4.138}$$

から議論を始める．ただし，$H_{\rm S}$, $H_{\rm R}$, H_1 は，それぞれ，注目系のハミルトニアン，熱浴系のハミルトニアン，相互作用ハミルトニアンである.

新しい演算子

$$X^{\rm I}(t) = {\rm e}^{iL_0t}X \tag{7.4.139}$$

を導入すると，(7.4.137) の解は

$$X(t) = U^{-1}(t,0)X^{\rm I}(t) \tag{7.4.140}$$

とかける．ただし，超演算子 L_0 は

$$L_0X = [H_0,\ X] \tag{7.4.141}$$

で定義した．$U^{-1}(t,0)$ は，初期条件

$$U^{-1}(0,0)=1 \tag{7.4.142}$$

の下に，微分方程式

$$\frac{d}{dt}U^{-1}(t,0)=U^{-1}(t,0)iL_1^{\mathrm{I}}(t) \tag{7.4.143}$$

を満たす．ただし，

$$L_1^{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{e}^{iL_0t}L_1\mathrm{e}^{-iL_0t}, \quad L_1X=[H_1,\ X] \tag{7.4.144}$$

である*11．

ここで，射影演算子 $\mathcal{P}$ を導入して，以下で利用しやすいように，(7.4.143) を変形しておく．射影演算子 $\mathcal{P}$ は，

$$\mathcal{P}^2=\mathcal{P}, \quad \mathcal{P}^\dagger=\mathcal{P} \tag{7.4.145}$$

を満たす演算子として，一般的に導入される．以下の議論で，

$$\mathcal{P}+\mathcal{Q}=1 \tag{7.4.146}$$

を満たす射影演算子 $\mathcal{Q}$ も利用する．射影演算子の具体形は後に導入することにする．

さて，$\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ を (7.4.143) 右辺の $U^{-1}(t,0)$ と $iL_1^{\mathrm{I}}(t)$ の間に挿入し，右から $\mathcal{Q}$ を作用させると

$$\frac{d}{dt}U^{-1}(t,0)\mathcal{Q}=U^{-1}(t,0)\mathcal{Q}iL_{1,\mathcal{QQ}}^{\mathrm{I}}(t)\ +U^{-1}(t,0)\mathcal{P}iL_{1,\mathcal{PQ}}^{\mathrm{I}}(t) \tag{7.4.147}$$

となる．ただし，

*11 (7.4.139) で定義した $X^{\mathrm{I}}(t)$ と，ここで導入した $X^{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{e}^{iL_0t}X\mathrm{e}^{-iL_0t}$ とは，同一の演算子である（付録 A.4 節参照）．

$$L^{\mathrm{I}}_{1,QQ}(t) = \mathcal{Q}L^{\mathrm{I}}_1(t)\mathcal{Q}, \quad L^{\mathrm{I}}_{1,PQ}(t) = \mathcal{P}L^{\mathrm{I}}_1(t)\mathcal{Q} \tag{7.4.148}$$

を導入した．(7.4.147) を解くと

$$U^{-1}(t,0)\mathcal{Q} = \mathcal{Q}U^{-1}_{QQ}(t,0) + i\int_0^t dsU^{-1}(s,0)\mathcal{P}L^{\mathrm{I}}_{1,PQ}(s)U^{-1}_{QQ}(t,s) \tag{7.4.149}$$

を得る．ただし，$U^{-1}_{QQ}(t,s)$ は，初期条件

$$U^{-1}_{QQ}(s,s) = 1 \tag{7.4.150}$$

の下での，微分方程式

$$\frac{d}{dt}U^{-1}_{QQ}(t,s) = U^{-1}_{QQ}(t,s)iL^{\mathrm{I}}_{1,QQ}(t) \tag{7.4.151}$$

の解である．(7.4.143) 右辺の $U^{-1}(t,0)$ と $iL^{\mathrm{I}}_1(t)$ の間に $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ を挿入し，(7.4.149) を利用すると，(7.4.143) は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U^{-1}(t,0) = {}& U^{-1}(t,0)\mathcal{P}iL^{\mathrm{I}}_1(t) - \int_0^t dsU^{-1}(s,0)\mathcal{P}L^{\mathrm{I}}_{1,PQ}(s)U^{-1}_{QQ}(t,s)L^{\mathrm{I}}_1(t) \\ &+ \mathcal{Q}U^{-1}_{QQ}(t,0)iL^{\mathrm{I}}_1(t)\end{aligned} \tag{7.4.152}$$

となる．

注目系の演算子 A にかかわる Heisenberg 表示での演算子 $A(t)$ は

$$A(t) = U^{-1}(t,0)\mathrm{e}^{iL_{\mathrm{S}}t}A, \quad L_{\mathrm{S}}X = [H_{\mathrm{S}},\ X] \tag{7.4.153}$$

とかける．(7.4.153) を時間微分し，(7.4.152) を利用すると，時間畳込み（TC）型方程式（微分積分方程式）

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(t) = {}& U^{-1}(t,0)i(L_{\mathrm{S}} + \mathcal{P}L^{\mathrm{I}}_1(t))\mathrm{e}^{iL_{\mathrm{S}}t}A \\ &- \int_0^t dsU^{-1}(s,0)\mathcal{P}L^{\mathrm{I}}_{1,PQ}(s)U^{-1}_{QQ}(t,s)L^{\mathrm{I}}_1(t)\mathrm{e}^{iL_{\mathrm{S}}t}A\end{aligned}$$

$$+\mathcal{Q}U_{QQ}^{-1}(t,0)iL_1^{\mathrm{I}}(t)\mathrm{e}^{iL_{\mathrm{S}}t}A \tag{7.4.154}$$

が得られる（3.3-3.5 節参照）.

導出した微分積分方程式 (7.4.154) は，時間非畳込み（TCL）型方程式（微分方程式）に書き直すことができる．まず，(7.4.149) 右辺最後の項を

$$\begin{aligned}i\int_0^t dsU^{-1}(t,0)(\mathcal{P}+\mathcal{Q})U^{-1}(s,t)\mathcal{P}L_{1,PQ}^{\mathrm{I}}(s)U_{QQ}^{-1}(t,s)\\ =U^{-1}(t,0)\mathcal{P}\Sigma^{-1}(t)+U^{-1}(t,0)\mathcal{Q}\Sigma^{-1}(t)\end{aligned} \tag{7.4.155}$$

と変形する．ただし，$\Sigma^{-1}(t)$ を

$$\Sigma^{-1}(t)=i\int_0^t dsU^{-1}(s,t)\mathcal{P}L_{1,PQ}^{\mathrm{I}}(s)U_{QQ}^{-1}(t,s) \tag{7.4.156}$$

と定義して導入した．$U^{-1}(t,0)\mathcal{Q}$ を含んだ項を集めると，(7.4.149) より，

$$\begin{aligned}U^{-1}(t,0)\mathcal{Q}=\mathcal{Q}U_{QQ}^{-1}(t,0)\left[1-\Sigma^{-1}(t)\right]^{-1}\\ +U^{-1}(t,0)\mathcal{P}\Sigma^{-1}(t)\left[1-\Sigma^{-1}(t)\right]^{-1}\end{aligned} \tag{7.4.157}$$

を得る．(7.4.157) を用いると，(7.4.143) は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U^{-1}(t,0)=U^{-1}(t,0)\mathcal{P}iL_1^{\mathrm{I}}(t)+U^{-1}(t,0)\mathcal{P}\Sigma^{-1}(t)\left[1-\Sigma^{-1}(t)\right]^{-1}iL_1^{\mathrm{I}}(t)\\ +\mathcal{Q}U_{QQ}^{-1}(t,0)\left[1-\Sigma^{-1}(t)\right]^{-1}iL_1^{\mathrm{I}}(t)\end{aligned} \tag{7.4.158}$$

となる．

(7.4.153) を時間微分し，(7.4.158) を利用すると，時間非畳込み（TCL）型方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(t)=U^{-1}(t,0)i(L_{\mathrm{S}}+\mathcal{P}L_1^{\mathrm{I}}(t))\mathrm{e}^{iL_{\mathrm{S}}t}A\\ +U^{-1}(t,0)\mathcal{P}\Sigma^{-1}(t)\left[1-\Sigma^{-1}(t)\right]^{-1}iL_1^{\mathrm{I}}(t)\mathrm{e}^{iL_{\mathrm{S}}t}A\\ +\mathcal{Q}U_{QQ}^{-1}(t,0)\left[1-\Sigma^{-1}(t)\right]^{-1}iL_1^{\mathrm{I}}(t)\mathrm{e}^{iL_{\mathrm{S}}t}A\end{aligned} \tag{7.4.159}$$

を得る（3.3-3.5 節参照）．

7.4.2 確率化の処方

時間非畳込み（TCL）型方程式 (7.4.159) を確率微分方程式とするために，柴田と橋爪は以下の手続き（処方箋）を採用した．

第 1 処方：(7.4.159) 右辺の各項で，相互作用表示と Heisenberg 表示の変換演算子 $U^{-1}(t,0)$ 以外の部分を L_1 に関して展開し，L_1 に関して意味のある最低次まで残す*12．

この処方を実行すると，

$$\frac{d}{dt}A(t) = iL_{\rm S}(t)A(t) - U^{-1}(t,0)\int_0^t ds\langle L_1^{\rm I}(s)L_1^{\rm I}(t)\rangle_{\rm R}\ {\rm e}^{iL_{\rm S}t}A \\ + iL_1^{\rm I}(t)A^{\rm I}(t) \tag{7.4.160}$$

が得られる．ただし，最後の項で

$$A^{\rm I}(t) = {\rm e}^{iL_{\rm S}t}A = {\rm e}^{iH_{\rm S}t}A{\rm e}^{-iH_{\rm S}t} \tag{7.4.161}$$

とおいた．また，射影演算子 $\mathcal{P}$ としては，

$$\mathcal{P}X \equiv \rho_{\rm R}\langle X\rangle_{\rm R} \equiv \rho_{\rm R}{\rm Tr}_{\rm R}\ (X\rho_{\rm R}) \tag{7.4.162}$$

を採用した．$\rho_{\rm R}$ は熱浴の平衡状態密度演算子であり，$\langle L_1\rangle_{\rm R} = 0$ を仮定した．もし，同じ議論を (7.4.154) から始めると，時間畳込み（TC）型方程式

$$\frac{d}{dt}A(t) = iL_{\rm S}(t)A(t) - \int_0^t dsU^{-1}(s,0)\langle L_1^{\rm I}(s)L_1^{\rm I}(t)\rangle_{\rm R}\ {\rm e}^{iL_{\rm S}t}A \\ + iL_1^{\rm I}(t)A^{\rm I}(t) \tag{7.4.163}$$

が得られる．なお，(7.4.160) や (7.4.163) 右辺最後の項は，

*12 この処方とあわせて長時間極限をとることは，van Hove（ファン・ホーヴェ）極限に当たる．

$$\langle iL_1^{\mathrm{I}}(t)A^{\mathrm{I}}(t)\rangle_{\mathrm{R}} = 0 \tag{7.4.164}$$

を満たしている．この性質があるので，この項をマルチンゲール（martingale）と解釈することができる*13．長時間極限をとると，(7.4.160) と (7.4.163) は同一の量子 Langevin 方程式となる．

第2処方：(7.4.160) 右辺最後の項にある相互作用表示の注目系演算子を Heisenberg 表示の演算子に置き換え，それとともに，熱浴演算子を乱雑演算子と理解する．

すなわち，最後の項の $A^{\mathrm{I}}(t)$ を $A(t)$ と書き換えて，さらに，$L_1^{\mathrm{I}}(t)$ にある相互作用表示での注目系の演算子を Heisenberg 表示での演算子に置き換え，非注目系の熱浴演算子は相互作用表示の演算子のまま乱雑演算子に移行するのである．

論文 [70] では，柴田と橋爪は，この第2処方を採用していない．そのお蔭で，マルチンゲール項を用いて第2種揺動散逸定理を書き下す際，注目系と熱浴系の演算子がともに相互作用表示の演算子であり，その可換性を利用することができた．一方，ここでの第2の処方を採用しても，マルチンゲール項の積を確率積に基づく計算にて評価することにより，柴田と橋爪の得た第2種の揺動散逸定理（論文 [70] の (5.2a) と (5.2b)）が導き出せる．この点に関しては，9.7 節で改めて議論する．

なお，第1処方のかわりに，(7.4.159) 右辺の各項を L_1 に関して同じ次数まで摂動展開すると，展開の任意の次数で (7.4.159) は元の Heisenberg 方程式 (7.4.137) を再現する．単なる摂動計算を実行したのでは，微視的な Heisenberg 方程式から確率微分方程式を導出することはできないのである．ここでの処方は，ミクロと（セミ）マクロをつなぐという統計力学本来の問題の解決に向けて，何らかの深遠な部分をえぐり出しているように思える．

7.5 S-H Langevin 方程式の応用と検証

前節の一般的な手続きを，熱浴と相互作用しているボソン系とスピン系に応用し

*13 マルチンゲールとは，公平な賭けを記述する確率過程のことである．たとえば，表と裏の出る確率が 1/2 である公平なコイン投げの賭けを考えよう．表が出たら 10 円を儲け，裏だったら 10 円を失うものとする．この賭けでの儲けはゼロである．つまり，各回のコイン投げで得る金額の期待値はゼロであり，この賭けはマルチンゲールである．

てみよう.

7.5.1 ボソン系への応用

熱浴と相互作用しているボソン系に応用して，緩和振動子に対する量子 Langevin 方程式を書き下してみる．注目ボソン系のハミルトニアン H_{S} と相互作用ハミルトニアン H_1 は，それぞれ，

$$H_{\mathrm{S}} = \omega a^\dagger a, \qquad H_1 = g\left(a^\dagger R + R^\dagger a\right) \tag{7.5.165}$$

とする．ただし，ボソン生成・消滅演算子 $a^\dagger$ と a は，正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1 \tag{7.5.166}$$

を満たす．ここでの扱いでは，熱浴ハミルトニアン H_{R} の具体形を知る必要はない．

このモデルにおける注目系の演算子 A に対する方程式 (7.4.160) は，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(t) &= i[H_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)] \\ &\quad + \kappa\{a^\dagger(t)[A(t),\ a(t)] + [a^\dagger(t),\ A(t)]a(t)\} + 2\kappa\bar{n}[a^\dagger(t),\ [A(t),\ a(t)]] \\ &\quad - ig[A^{\mathrm{I}}(t),\ a^{\mathrm{I}}(t)^\dagger]R^{\mathrm{I}}(t) + igR^{\mathrm{I}}(t)^\dagger[a^{\mathrm{I}}(t),\ A^{\mathrm{I}}(t)]\end{aligned} \tag{7.5.167}$$

となる．ただし，長時間極限をとって，

$$\kappa = \Re\mathrm{e}\ g^2 \int_0^\infty ds\,\left\langle [R^{\mathrm{I}}(0),\ R^{\mathrm{I}}(s)^\dagger]\right\rangle_{\mathrm{R}}\ \mathrm{e}^{-i\omega s}, \tag{7.5.168}$$

$$\kappa(\bar{n}+1) = \Re\mathrm{e}\ g^2 \int_0^\infty ds\,\left\langle R^{\mathrm{I}}(0)R^{\mathrm{I}}(s)^\dagger\right\rangle_{\mathrm{R}}\ \mathrm{e}^{-i\omega s} \tag{7.5.169}$$

とおいた．$\Re\mathrm{e}$ は，それ以下の部分の実数部を表す．

第 2 の処方により，(7.5.167) 右辺の最後の項にある $a^{\mathrm{I}}(t)^\dagger$, $a^{\mathrm{I}}(t)$, $A^{\mathrm{I}}(t)$ を，それぞれ，$a^\dagger(t)$, $a(t)$, $A(t)$ に置き換え，それと同時に

$$dF_t = -igR^{\mathrm{I}}(t)dt = \sqrt{2\kappa}dB_t, \tag{7.5.170}$$

$$dF_t^\dagger = igR^{\mathrm{I}}(t)^\dagger dt = \sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger \tag{7.5.171}$$

を乱雑力演算子の変化分（差分）と読み替えるのである．ただし，量子 Brown 運動の差分量演算子 dB_t，$dB_t^\dagger$ は，(7.2.82), (7.2.84) を満たすものとする．これにより，(7.5.167) は，量子 Langevin 方程式

$$\begin{aligned} dA(t) &= i[H_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]dt \\ &\quad + \kappa\{a^\dagger(t)[A(t),\ a(t)] + [a^\dagger(t),\ A(t)]a(t)\}dt + 2\kappa\bar{n}[a^\dagger(t),\ [A(t),\ a(t)]]dt \\ &\quad + [A(t),\ a^\dagger(t)]dF_t + dF_t^\dagger[a(t),\ A(t)] \end{aligned} \tag{7.5.172}$$

となる．

一般公式 (7.5.172) の A のところに a，$a^\dagger$，$a^\dagger a$ を代入すると，

$$da(t) = -i\omega a(t)dt - \kappa a(t)dt + dF_t, \tag{7.5.173}$$

$$da^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t)dt - \kappa a^\dagger(t)dt + dF_t^\dagger, \tag{7.5.174}$$

$$d[a^\dagger(t)a(t)] = -2\kappa[a^\dagger(t)a(t) - \bar{n}]dt + a^\dagger(t)dF_t + dF_t^\dagger a(t) \tag{7.5.175}$$

を得る．$a(t)$ や $a^\dagger(t)$ に関する Langevin 方程式 (7.5.173) や (7.5.174) では，乱雑力を含む項に注目系の演算子が存在しないので，伊藤型と Stratonovich 型の確率微分方程式の構造は同一であり，区別がない．一方，$a^\dagger(t)a(t)$ に関する Langevin 方程式 (7.5.175) では，右辺第 2 項の $a^\dagger(t)dF_t$ と第 3 項の $dF_t^\dagger a(t)$ の確率積が，はたして，伊藤型であるのか，あるいは，Stratonovich 型であるのかを検証しなければならない [80, 81]．

7.5.2 ボソン系での検証

もし，S-H Langevin 方程式を Stratonovich 型確率微分方程式と解釈すると，$a^\dagger a$ の微分は，Stratonovich 型の確率計算により

$$\begin{aligned} d[a^\dagger(t)a(t)] &= da^\dagger(t)\circ a(t) + a^\dagger(t)\circ da(t) \\ &= -2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt + a^\dagger(t)\circ dF_t + dF_t^\dagger\circ a(t) \end{aligned} \tag{7.5.176}$$

となる．ただし，(7.5.173) と (7.5.174) を用いた．明らかに，(7.5.176) は (7.5.175) と矛盾する．一方，S-H Langevin 方程式を伊藤型確率微分方程式と解釈して，$a^\dagger a$ の微分を伊藤型の確率計算により評価すると，

$$
\begin{aligned}
d[a^\dagger(t)a(t)] &= da^\dagger(t)\cdot a(t) + a^\dagger(t)\cdot da(t) + da^\dagger(t)da(t) \\
&= -2\kappa[a^\dagger(t)a(t) - \bar{n}]dt + a^\dagger(t)\cdot dF_t + dF_t^\dagger\cdot a(t)
\end{aligned}
\tag{7.5.177}
$$

となる．ただし，第 2 等号で (7.5.173), (7.5.174), および, (7.2.84) から得られる量子確率過程 dF_t, $dF_t^\dagger$ に対する弱い関係

$$
dF_t^\dagger dF_t = 2\kappa dB_t^\dagger dB_t \overset{w}{=} 2\kappa\bar{n}dt \tag{7.5.178}
$$

を利用した．(7.5.177) は (7.5.175) そのものである．以上より，S-H Langevin 方程式は伊藤型確率微分方程式であることが判明した．

ところで，演算子が確率演算子に移行してからも，同時刻交換子

$$
[a(t),\ a^\dagger(t)] = 1 \tag{7.5.179}
$$

が成立するものと仮定して，計算を進めてきた．そこで，この仮定に一貫性があるかどうかを調べるために，同時刻交換子 $[a(t),\ a^\dagger(t)]$ の確率微分を計算する．伊藤型確率微分により，

$$
\begin{aligned}
d[a(t),\ a^\dagger(t)] &= [da^\dagger(t)\,;a(t)] + [a^\dagger(t)\,;da(t)] + [da^\dagger(t),\ da(t)] \\
&= -2\kappa dt + [dF_t,\ dF_t^\dagger] = 0
\end{aligned}
\tag{7.5.180}
$$

を得る．ただし，

$$
[A\,;B] = A\cdot B - B\cdot A \tag{7.5.181}
$$

である．第 2 等号で，確率微分方程式 (7.5.173), (7.5.174) を代入し，伊藤型確率積で成立する可換性

$$[a^\dagger(t)\,;dF_t] = 0, \qquad [dF_t^\dagger\,;a(t)] = 0 \tag{7.5.182}$$

を用いている．第 3 等号では

$$[dF_t,\ dF_t^\dagger] = 2\kappa[dB_t,\ dB_t^\dagger] = 2\kappa dt \tag{7.5.183}$$

を代入した．ただし，この式の第 2 等号では，交換関係 (7.2.82) を用いた．以上より，ある時刻（たとえば，初期時刻）で同時刻交換関係 $[a,\ a^\dagger] = 1$ が成立していれば，確率演算子に対しても同時刻交換関係 (7.5.179) が任意の時刻で成立することが示された．

ところで，先にも述べたように，証明に使用した確率微分方程式 (7.5.173), (7.5.174) には，伊藤型と Stratonovich 型の区別がない．したがって，同時刻交換関係が保存することは，Stratonovich 型確率微分によっても示せるはずである．実際，

$$\begin{aligned} d[a(t),\ a^\dagger(t)] &= [da^\dagger(t) \circ\!\!; a(t)] + [a^\dagger(t) \circ\!\!; da(t)] \\ &= -2\kappa dt + [dF_t^\dagger \circ\!\!; a(t)] + [a^\dagger(t) \circ\!\!; dF_t] \\ &= -2\kappa dt + [dF_t^\dagger\,; a(t)] + [a^\dagger(t)\,; dF_t] + [dF_t,\ dF_t^\dagger] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.5.184}$$

となる．ただし，第 3 等号で，変換公式 (7.2.91) を利用した．第 4 等号では，(7.5.183) を代入した．

7.5.3 スピン系への応用

スピン系のハミルトニアンは

$$H = H_{\rm S} + H_{\rm R} + H_1, \tag{7.5.185}$$

$$H_{\rm S} = \omega s^z, \tag{7.5.186}$$

$$H_1 = g(s^x R^x + s^y R^y + s^z R^z) = g \sum_{j=x,y,z} s^j R^j \tag{7.5.187}$$

で与えられているものとする．ただし，スピン演算子 s^x, s^y, s^z は，交換関係

$$[s^i,\ s^j] = i\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}s^k \tag{7.5.188}$$

を満たす．ϵ_{ijk} は 3 次元の 3 階完全反対称テンソルであり，i, j, k は，$(1,2,3) = (x,y,z)$ の値をとる．ϵ_{ijk} の値は，$\epsilon_{123} = 1$ とし，添え字 123 から偶数回の互換で移れる添え字 ijk のとき $\epsilon_{ijk} = 1$，奇数回の互換で移れる添え字 ijk のとき $\epsilon_{ijk} = -1$，それ以外の添え字 ijk のとき $\epsilon_{ijk} = 0$ である．g はスピン系と熱浴との結合定数，R^x, R^y, R^z は熱浴の演算子である．ここの取り扱いの範囲では，熱浴のハミルトニアン $H_{\rm R}$ の具体的な表式を特定する必要はない．

このスピン系の演算子に対する方程式 (7.4.160) は，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A(t) = iL_{\rm S}(t)A(t) \\
&+\phi_{+-}[s^-(t),\ A(t)]s^+(t) + \phi_{-+}[s^+(t),\ A(t)]s^-(t) \\
&-\phi_{+-}{}^*s^-(t)[s^+(t),\ A(t)] - \phi_{-+}{}^*s^+(t)[s^-(t),\ A(t)] \\
&+\phi_{zz}[s^z(t),\ A(t)]s^z(t) - \phi_{zz}{}^*s^z(t)[s^z(t),\ A(t)] \\
&+i\sum_{j=x,y,z} g[s^{j\,\rm I}(t),\ A^{\rm I}(t)]R^{j\,\rm I}(t)
\end{aligned} \tag{7.5.189}$$

となる．ただし，

$$\phi_{+-} = \frac{g^2}{4}\int_0^\infty dt\langle R^{+\,\rm I}(t)R^{-\,\rm I}(0)\rangle_{\rm R}\ {\rm e}^{-i\omega t}, \tag{7.5.190}$$

$$\phi_{-+} = \frac{g^2}{4}\int_0^\infty dt\langle R^{-\,\rm I}(t)R^{+\,\rm I}(0)\rangle_{\rm R}\ {\rm e}^{-i\omega t}, \tag{7.5.191}$$

$$\phi_{zz} = g^2\int_0^\infty dt\langle R^{z\,\rm I}(t)R^{z\,\rm I}(0)\rangle_{\rm R}, \tag{7.5.192}$$

$$s^\pm = s^x \pm is^y, \quad R^\pm = R^x \pm iR^y \tag{7.5.193}$$

である．(7.5.189) 右辺の第 2 行-第 4 行は，(4.1.4) 右辺において長時間極限をとったものに対応する*14.

---

*14 (7.5.189) 右辺と (4.1.4) 右辺の対応する項で，係数に 1/4 の相違が生じているのは，ここでの $R^\pm$ の定義 (7.5.193) と定義 (3.3.101) の間の 1/2 の違いのためである．

第 2 の処方により，(7.5.189) 右辺の最後の項にある $s^{j\,\mathrm{I}}(t)$ と $A^{\mathrm{I}}(t)$ を，それぞれ，$s^j(t)$ と $A(t)$ に置き換え，それと同時に

$$dF_t^j = gR^{j\,\mathrm{I}}(t)dt \tag{7.5.194}$$

を量子確率過程の差分と読み替えるのである．これにより，(7.5.189) は，次のようにスピン緩和を記述する S-H Langevin 方程式へと変身する：

$$\begin{aligned}
ds^x(t) = & -(\omega + \Delta_2)s^y(t)dt \\
& -(\Delta_1 - \Delta_2)\{s^y(t),\ s^z(t)\}dt \\
& -\frac{1}{2}(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)s^x(t)dt \\
& -\frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10})\{s^z(t),\ s^x(t)\}dt \\
& + dF_t^y s^z(t) - dF_t^z s^y(t),
\end{aligned} \tag{7.5.195}$$

$$\begin{aligned}
ds^y(t) = & (\omega + \Delta_2)s^x(t)dt \\
& +(\Delta_1 - \Delta_2)\{s^z(t),\ s^x(t)\}dt \\
& -\frac{1}{2}(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)s^y(t)dt \\
& -\frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10})\{s^y(t),\ s^z(t)\}dt \\
& + dF_t^z s^x(t) - dF_t^x s^z(t),
\end{aligned} \tag{7.5.196}$$

$$\begin{aligned}
ds^z(t) = & -(\gamma_{01} + \gamma_{10})s^z(t)dt \\
& +(\gamma_{01} - \gamma_{10})\left\{[s^x(t)]^2 + [s^y(t)]^2\right\}dt \\
& + dF_t^x s^y(t) - dF_t^y s^x(t).
\end{aligned} \tag{7.5.197}$$

ただし，

$$\Delta_1 = \Im\mathrm{m}\,\phi_{zz} - \Re\mathrm{e}\,\Psi - \Im\mathrm{m}\,\Phi, \quad \Delta_2 = -\Im\mathrm{m}\,\Phi, \tag{7.5.198}$$

$$\gamma_{01} = \Re\mathrm{e}\,\Phi - \Im\mathrm{m}\,\Psi, \quad \gamma_{10} = \Re\mathrm{e}\,\Phi + \Im\mathrm{m}\,\Psi, \quad \zeta = 2\Re\mathrm{e}\,\phi_{zz}, \tag{7.5.199}$$

$$\Phi = \phi_{+-} + \phi_{-+}{}^*, \quad \Psi = -i\{\phi_{+-} - \phi_{-+}{}^*\} \tag{7.5.200}$$

とおいた．$\Re\mathrm{e}$，$\Im\mathrm{m}$ は，それぞれ，その直後にある量の実数部，虚数部を表して

いる.

量子確率過程

$$dF_t^{\pm} = \frac{1}{2}\left(dF_t^x \pm dF_t^y\right) \tag{7.5.201}$$

と dF_t^z は,

$$\left\langle dF_t^- \right\rangle_{\mathrm{R}} = \left\langle dF_t^+ \right\rangle_{\mathrm{R}} = 0, \quad \langle dF_t^z \rangle_{\mathrm{R}} = 0, \tag{7.5.202}$$

および, 弱い関係

$$dF_t^- dF_t^- \overset{w}{=} dF_t^+ dF_t^+ \overset{w}{=} 0, \tag{7.5.203}$$

$$dF_t^+ dF_t^- \overset{w}{=} \gamma_{01} dt, \qquad dF_t^- dF_t^+ \overset{w}{=} \gamma_{10} dt, \tag{7.5.204}$$

$$dF_t^z dF_t^z \overset{w}{=} \zeta\ dt \tag{7.5.205}$$

を満たす. 量子 Wiener 過程 dF_t^z と $dF_t^{\pm}$ の間には, 相関がないものとしている.

ここで, スピン系に対する S-H Langevin 方程式が, はたして伊藤型なのか, それとも Stratonovich 型なのかを検証してみよう [80, 81].

7.5.4 スピン系での検証

交換関係 $[s^x(t),\ s^y(t)]$ の微分を, S-H Langevin 方程式 (7.5.195)-(7.5.197) を使って, 確率計算の下に評価してみよう.

Langevin 方程式 (7.5.195)-(7.5.197) を Stratonovich 型確率微分方程式と解釈すると, $[s^x(t),\ s^y(t)]$ の微分は,

$$\begin{aligned}
d[s^x(t),\ s^y(t)] &= [ds^x(t) \mathbin{\circ\!\!,}\ s^y(t)] + [s^x(t) \mathbin{\circ\!\!,}\ ds^y(t)] \\
&= i[-(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)s^z(t) \\
&\quad + (\gamma_{01} - \gamma_{10})\{[s^x(t)]^2 + [s^y(t)]^2 - 2[s^z(t)]^2\}]dt \\
&\quad + [dF_t^y \circ s^z(t) - dF_t^z \circ s^y(t) \mathbin{\circ\!\!,}\ s^y(t)] \\
&\quad + [s^x(t) \mathbin{\circ\!\!,}\ dF_t^z \circ s^x(t) - dF_t^x \circ s^z(t)] \\
&= i ds^z(t) - i\zeta s^z(t) dt
\end{aligned} \tag{7.5.206}$$

となる．ただし，

$$[A \mathbin{\mathring{,}} B] = A \circ B - B \circ A \tag{7.5.207}$$

である．第 3 等号では，量子 Wiener 過程 $dF_t^{\pm}$ と dF_t^z にかかわる確率積を伊藤型に変換して評価した．この結果は，同時刻交換関係

$$[s^x(t),\ s^y(t)] = is^z(t) \tag{7.5.208}$$

が時間とともに変化しないことを保障しない．

一方，Langevin 方程式 (7.5.195)-(7.5.197) を伊藤型の確率微分方程式とみなすと，交換関係 $[s^x(t),\ s^y(t)]$ の微分の評価は，

$$\begin{aligned}
d[s^x(t),\ s^y(t)] &= [ds^x(t),\ s^y(t)] + [s^x(t),\ ds^y(t)] + [ds^x(t),\ ds^y(t)] \\
&= i[-(\gamma_{01} + \gamma_{10} + \zeta)s^z(t) \\
&\quad + (\gamma_{01} - \gamma_{10})\{[s^x(t)]^2 + [s^y(t)]^2 - 2[s^z(t)]^2\}]dt \\
&\quad + [dF_t^y s^z(t) - dF_t^z s^y(t),\ s^y(t)] \\
&\quad + [s^x(t),\ dF_t^z s^x(t) - dF_t^x s^z(t)] \\
&\quad + [dF_t^y s^z(t) - dF_t^z s^y(t),\ dF_t^z s^x(t) - dF_t^x s^z(t)] \\
&= ids^z(t)
\end{aligned} \tag{7.5.209}$$

となる．ただし，量子 Wiener 過程 $dF_t^{\pm}$ と dF_t^z にかかわる伊藤型確率積の規則を使用した．この結果は，同時刻交換関係 (7.5.208) が時間的に変化しないことを示している．

次に，$\boldsymbol{s}^2(t) \equiv [s^x(t)]^2 + [s^y(t)]^2 + [s^z(t)]^2$ の微分を評価してみよう．今考えている系ではスピンの大きさは保存するので，$\boldsymbol{s}^2(t)$ の微分はゼロのはずである．まず，Langevin 方程式 (7.5.195)-(7.5.197) を Stratonovich 型確率微分方程式と解釈する．その場合，$[s^x(t)]^2$ の微分は

$$\begin{aligned}
d[s^x(t)]^2 &= ds^x(t) \circ s^x(t) + s^x(t) \circ ds^x(t) \\
&= -(\omega + \Delta_2)\{s^y(t),\ s^x(t)\}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\Delta_1-\Delta_2)\{s^x(t),\ \{s^y(t),\ s^z(t)\}\}dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt\\
&-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})\{s^x(t),\ \{s^z(t),\ s^x(t)\}\}dt\\
&+\{dF_t^y\circ s^z(t)-dF_t^z\circ s^y(t)\ \mathring{,}\ s^x(t)\}\\
=&-(\omega+\Delta_2)\{s^y(t),\ s^x(t)\}dt\\
&-(\Delta_1-\Delta_2)\{s^x(t),\ \{s^y(t),\ s^z(t)\}\}dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt\\
&-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})\{s^x(t),\ \{s^z(t),\ s^x(t)\}\}dt\\
&+(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2dt+\zeta[s^y(t)]^2dt\\
&+dF_t^y\{s^x(t),\ s^z(t)\}-dF_t^z\{s^x(t),\ s^y(t)\}\\
&-\frac{i}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})\{s^y(t),\ s^x(t)\}dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt
\end{aligned}
\tag{7.5.210}
$$

となる．同様に，$d[s^y(t)]^2$ と $d[s^z(t)]^2$ の計算をすると，結局，

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{s}^2(t)=&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2\}dt\\
&-2(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2dt\neq 0
\end{aligned}
\tag{7.5.211}
$$

を得る．

一方，Langevin 方程式 (7.5.195)-(7.5.197) を伊藤型の確率微分方程式と解釈すると，$[s^x(t)]^2$ の微分は

$$
\begin{aligned}
d[s^x(t)]^2=&\,ds^x(t)\ s^x(t)+s^x(t)ds^x(t)+ds^x(t)ds^x(t)\\
=&-(\omega+\Delta_2)\{s^y(t),\ s^x(t)\}dt\\
&-(\Delta_1-\Delta_2)\{s^x(t),\ \{s^y(t),\ s^z(t)\}\}dt\\
&-(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)[s^x(t)]^2dt\\
&-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})\{s^x(t),\ \{s^z(t),\ s^x(t)\}\}dt
\end{aligned}
$$

$$+(\gamma_{01}+\gamma_{10})[s^z(t)]^2dt+\zeta[s^y(t)]^2dt$$
$$+dF_t^y\{s^x(t),\ s^z(t)\}-dF_t^z\{s^x(t),\ s^y(t)\} \qquad (7.5.212)$$

となる．$d[s^y(t)]^2$ と $d[s^z(t)]^2$ も同様に計算して，

$$d\boldsymbol{s}^2(t)=d[s^x(t)]^2+d[s^y(t)]^2+d[s^z(t)]^2=0 \qquad (7.5.213)$$

を得る．

以上の考察より，S-H Langevin 方程式 (7.5.195)-(7.5.197) は，伊藤型確率微分方程式と解釈すべきであることが判明した．

7.1 節の扱いでは導出した量子 Langevin 方程式が Stratonovich 型となり，一方，7.4 節の扱いでは伊藤型となった．いずれの扱いも，確率演算子を通常の演算子と見なして計算を実行している．それにもかかわらず後者が伊藤型となったのは，第 2 処方が効いているからである．

第8章

散逸場の量子論（NETFD）

以下の章では，熱平衡状態から遠く離れた（far-from-equilibrium state）散逸量子系を扱う正準演算子形式の理論体系を導入する．この理論体系は，Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics（NETFD）とよばれている*1．これは，表 7.1 にある非平衡統計力学におけるすべての描像を一貫性をもって統合した体系で，そこでは通常の量子力学や量子場の理論と同様の手法（自然認識における演算子代数と表現空間という二重構造の概念を踏襲した手法）により，散逸量子系を扱うことが可能である*2．

量子力学では，Schrödinger 方程式により状態の時間発展を扱う Schrödinger 描像と，Heisenberg 方程式により演算子の時間発展を扱う Heisenberg 描像が存在する．散逸的時間発展を記述する NETFD にも，これと同じ構造が存在する．図 8.1 にその構造を記した．図の右側には Schrödinger 描像，左側には Heisenberg 描像による扱いが配置されている．下から上へ行くほど，粗視化の程度が進む*3．

最下段は，量子確率微分方程式（この図には，伊藤型確率積による表式をあげてある）による扱いである．その右列に掲げてある式が，量子確率 Liouville 方程式である．その時間発展推進子 $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt$ を使って確率 Heisenberg 方程式 [82] を書き下すと，左列に掲げてある量子系の Langevin 方程式（量子 Langevin 方程式）が得られる．図中の表式は伊藤型確率積を採用しているので，確率 Heisenberg 方程

*1 NETFD のくわしい参考文献や建設の道筋は，付録 A.9 節を参照のこと．

*2 量子散逸場に対するこの新しい理論体系は，不可逆性に対する見通しのよい視点を提供するばかりではなく，その二重構造が Boltzmann の当初の夢を解決するための突破口を与えてくれるものと期待される．なお，この二重構造は，量子論が存在しなかった Boltzmann の時代には，まったく認識されていなかったものである．

*3 ただし，最上段の量子散逸場の理論への矢印では粗視化の程度の変更はない．

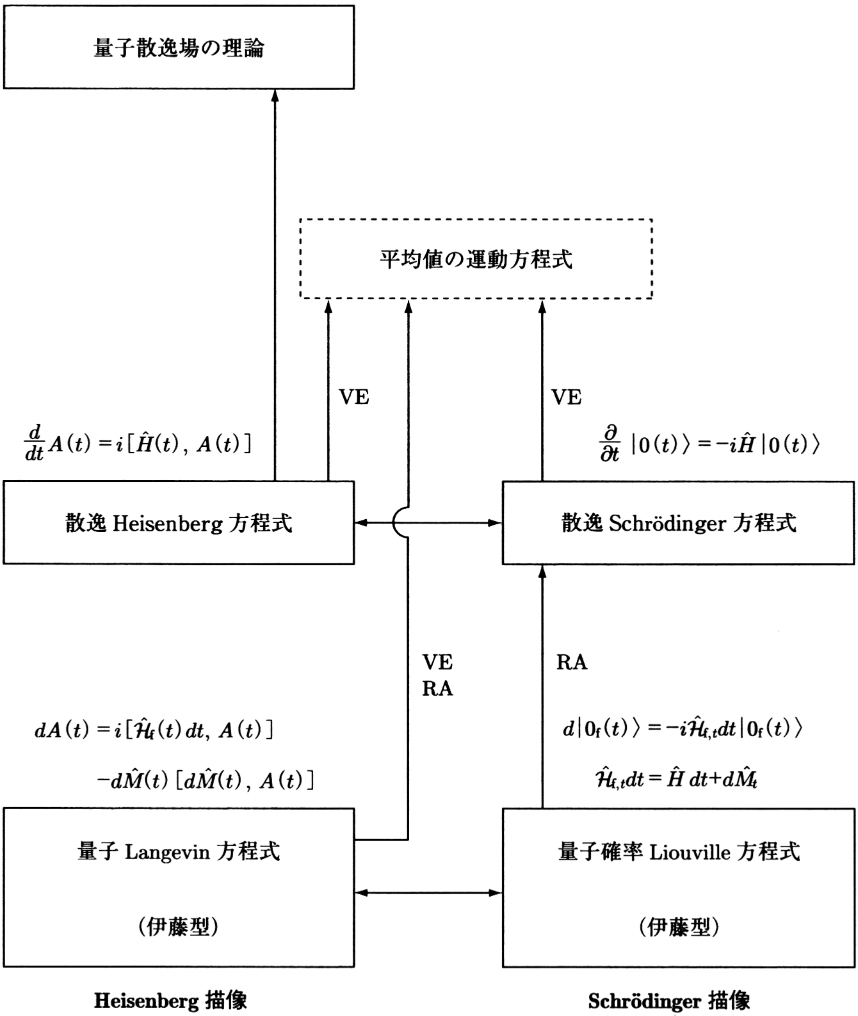


図 8.1 Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics（NETFD）の体系．RA は乱雑平均の意味である．VE は真空期待値を表す．

式の右辺に第 2 項が加わっている．

中段は，散逸過程を考慮に入れた演算子による扱いである．その右列に掲げてある式が，散逸的時間発展を考慮に入れた“散逸 Schrödinger 方程式”（量子マスター方程式）である．その無限小時間発展推進子 $\hat{H}$ を使って Heisenberg 方程式を書き下すと，左列に掲げてある散逸的時間発展を考慮に入れた演算子の運動方程

式が得られる．量子散逸系の時間発展を記述する“散逸 Heisenberg 方程式”の存在が，量子散逸場の理論の建設を可能にしているのである（図の最上段）．

最下段の量子確率微分方程式の乱雑平均（RA）をとると，中段の各方程式が得られる．中段の各方程式を利用して，真空期待値（VE）の運動方程式を書き下すと，右列と左列のいずれからも同一の平均値運動方程式が得られる．

第 8 章では，体系全体の要となる中段の理論体系を導入する．その上で，第 9 章にて，最下段の確率微分方程式の理論体系を導入し，その物理系への応用を扱う．

Liouville 演算子による体系の構造を 8.1 節で調べ，それを踏襲する形で NETFD の基礎を 8.2 節にて書き上げる．8.3 節で，半自由ボソン系を題材にして，NETFD の体系のうち，図 8.1 中段の体系を導入する．8.4 節では，統計演算子による量子マスター方程式の体系と NETFD の体系との間に成立する「対応原理」を紹介する．そこで，スピン系に対する緩和演算子も導入される．NETFD の体系の構造をより深く理解するために，8.5 節で，統計演算子の量子マスター方程式を c-数空間に写像する方法にて，半自由ボソン系を扱う．

8.1 Liouville 演算子の正準形式

量子 Liouville 方程式（量子マスター方程式）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = -iL\rho(t) \tag{8.1.1}$$

の最も基本的な特性を調べてみよう．Liouville 演算子 L と統計演算子 $\rho(t)$ の特性は，以下のようにまとめられる[*4]（3.1 節参照）．

D1. Liouville 演算子は，

$$(iL\ \bullet)^\dagger = iL\ \bullet \tag{8.1.2}$$

の意味での「エルミート性」を有する．たとえば，

*4 Louville 演算子 L は，統計演算子 $\rho(t)$ に作用するので，超演算子ともよばれる．Liouville-von Neumann 方程式に対する Liouville 演算子は，$L\ \bullet = [H,\ \bullet\ ]$ である．ただし，H は系のハミルトニアンを表す．

$$(i[H,\ \bullet\ ])^\dagger = -i[\ \bullet,\ H^\dagger] = i[H,\ \bullet\ ], \tag{8.1.3}$$

$$\begin{aligned}(\Pi\ \bullet)^\dagger &= \kappa\left\{[a\ \bullet\ ,\ a^\dagger] + [a,\ \bullet\ a^\dagger]\right\}^\dagger + 2\kappa\bar{n}\left([a,\ [\ \bullet\ ,\ a^\dagger]]\right)^\dagger \\ &= \Pi\ \bullet.\end{aligned} \tag{8.1.4}$$

ただし，a, $a^\dagger$ はボソン演算子で，交換関係 $[a,\ a^\dagger]=1$ を満たす．$\bullet$ は被演算子を表す．

D2. 確率の保存 (Tr $\rho=1$)：

$$\mathrm{Tr}\ L\ \bullet = 0. \tag{8.1.5}$$

D3. 統計演算子（密度演算子）のエルミート性：

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t). \tag{8.1.6}$$

$\rho(t)$ の固有値は，ゼロまたは正の実数である．

統計演算子を用いた対角和の体系では，オブザーバブル（観測量演算子）A の期待値は，

$$\langle A\rangle_t = \mathrm{Tr}(A\rho(t)) = \mathrm{Tr}(A\mathrm{e}^{-iLt}\rho(0)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{iLt}A\mathrm{e}^{-iLt}\rho(0)) \tag{8.1.7}$$

で与えられる．ただし，形式解

$$\rho(t) = \mathrm{e}^{-iLt}\rho(0) \tag{8.1.8}$$

と，特性 (8.1.5) を用いた．

そこで，“Heisenberg 超演算子” $A(t)$ を

$$A(t) = \mathrm{e}^{iLt}A\mathrm{e}^{-iLt} \tag{8.1.9}$$

により定義すると（付録 A.4 節参照），それが Liouville 演算子 $L(t)(=\mathrm{e}^{iLt}$ $L\mathrm{e}^{-iLt}=L)$ を使った “Heisenberg 方程式”

$$\frac{dA(t)}{dt} = i[L(t),\ A(t)] \tag{8.1.10}$$

を満たすことがわかる．

8.2 NETFD の基礎

前節 8.1 に掲げた Liouville 方程式の一般的な特性を参照して，NETFD の一般的基礎事項を書き下してみよう．まず始めに，NETFD における技術的な基礎事項を掲げる．

T1. NETFD では，すべての演算子 A には，チルダ演算子 $\tilde{A}$ が伴う．ただし，チルダ共役 $\sim$ は，

$$(A_1 A_2)^{\sim} = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2, \tag{8.2.11}$$

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)^{\sim} = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2, \tag{8.2.12}$$

$$(\tilde{A})^{\sim} = A, \tag{8.2.13}$$

$$(A^{\dagger})^{\sim} = \tilde{A}^{\dagger} \tag{8.2.14}$$

で規定される．ただし，c_1, c_2 は c-数である．

T2. チルダ演算子と非チルダ演算子の同時刻交換関係は可換である*5：

$$[A,\ \tilde{B}] = 0. \tag{8.2.15}$$

T3. ブラ熱真空 $\langle 1|$ は，熱状態条件

$$\langle 1|A^{\dagger} = \langle 1|\tilde{A} \tag{8.2.16}$$

を満たす．

NETFD における系の時間発展は，散逸 Schrödinger 方程式（量子マスター方程式）$(\hbar = 1)$

*5 フェルミオンのチルダ演算子と非チルダ演算子では，同時刻交換関係は反交換である．

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}\ |0(t)\rangle \tag{8.2.17}$$

で与えられる．前節で掲げた Liouville 方程式の一般的な特性は，NETFD の言葉を使うと次のようになる．

B1. ハット・ハミルトニアン $\hat{H}$ は，チルディアン（tildian）とよばれる特性：

$$\left(i\hat{H}\right)^{\sim} = i\hat{H} \tag{8.2.18}$$

を満たす．$\hat{H}$ は，必ずしもエルミート演算子ではない．

B2. ブラ熱真空に対して，ハット・ハミルトニアンはゼロ固有値をもつ：

$$\langle 1|\hat{H} = 0. \tag{8.2.19}$$

これは，確率の保存（$\langle 1|0(t)\rangle = 1$）の表れである．

B3. 熱真空 $\langle 1|$ と $|0\rangle$ は，チルダ不変

$$\langle 1|^{\sim} = \langle 1|, \quad |0\rangle^{\sim} = |0\rangle \tag{8.2.20}$$

であり，$\langle 1|0\rangle = 1$ と規格化されている．

NETFD では，オブザーバブル A の期待値は，

$$\langle A\rangle_t = \langle 1|A|0(t)\rangle = \langle 1|A\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}|0\rangle = \langle 1|\mathrm{e}^{i\hat{H}t}A\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}|0\rangle \tag{8.2.21}$$

で与えられる．ただし，形式解

$$|0(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\hat{H}t}|0\rangle \tag{8.2.22}$$

と特性 (8.2.19) を用いた．

これより，Heisenberg 演算子 $A(t)$ は

$$A(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t}A\mathrm{e}^{-i\hat{H}t} \tag{8.2.23}$$

により定義され，それが，ハット・ハミルトニアン $\hat{H}(t)(=\mathrm{e}^{i\hat{H}t}\hat{H}\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}=\hat{H})$ でかかれた散逸 Heisenberg 方程式

$$\frac{d}{dt}A(t)=i[\hat{H}(t),\ A(t)] \tag{8.2.24}$$

を満たすことがわかる.

8.3 散逸不安定粒子の正準演算子形式

主にボソン系を例にして，説明を進めることにする.

8.3.1 半自由場ハット・ハミルトニアンの導出

ここでは，半自由場ハット・ハミルトニアンの公理的導出を行う*6．半自由場のハット・ハミルトニアンは，$(a,\tilde{a},a^\dagger,\tilde{a}^\dagger)$ に関して双線形で，大域的位相変換 $a\to a\mathrm{e}^{i\theta}$ の下に不変である：

$$\hat{H}=g_1a^\dagger a+g_2\tilde{a}^\dagger\tilde{a}+g_3a\tilde{a}+g_4a^\dagger\tilde{a}^\dagger+g_0. \tag{8.3.25}$$

ただし，g は，時間に依存する複素 c-数関数である.

演算子 a, $\tilde{a}^\dagger$ などは，正準交換関係

$$[a_{\boldsymbol{k}},\ a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'},\qquad [\tilde{a}_{\boldsymbol{k}},\ \tilde{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{8.3.26}$$

を満たす．チルダ演算子と非チルダ演算子は，同時刻において互いに可換である．以下，演算子 a, $\tilde{a}^\dagger$ などへの運動量 $\boldsymbol{k}$ やその他の自由度に関する添え字を，必要な場合を除いて省略するが，NETFD では散逸量子場を扱っていることを心に留めておき，必要に応じて添え字を復活する.

8.2 節の要請 **B1** により，(8.3.25) はチルディアンとなる：

---

*6 NETFD の体系の全体構造を急いで知りたい読者は，導出の詳細は後回しにして，(8.3.41)-(8.3.43) の結果を認めて，8.3.2 項へ進むとよい.

$$\hat{H} = \omega(t)(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + i\hat{\Pi}, \tag{8.3.27}$$

$$\hat{\Pi} = c_1(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + c_2 a\tilde{a} + c_3 a^\dagger \tilde{a}^\dagger + c_4. \tag{8.3.28}$$

ただし，$\omega(t) = \Re\mathrm{e}\, g_1 = -\Re\mathrm{e}\, g_2$，$c_1 = \Im\mathrm{m}\, g_1 = \Im\mathrm{m}\, g_2$，$c_2 = \Im\mathrm{m}\, g_3$，$c_3 = \Im\mathrm{m}\, g_4$，$c_4 = \Im\mathrm{m}\, g_0$ とおいた．便宜上，$\omega(t)$ のみ，時間依存であることを明記した．

8.2 節の要請 **T3**，すなわち (8.2.16) で $A = a$ とした

$$\langle 1|a^\dagger = \langle 1|\tilde{a} \tag{8.3.29}$$

を用いると，要請 **B2**，(8.2.19)，は，

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad c_3 + c_4 = 0 \tag{8.3.30}$$

を与える．これにより，(8.3.28) は，

$$\hat{\Pi} = c_1(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + c_2 a\tilde{a} - (2c_1 + c_2)\, a^\dagger \tilde{a}^\dagger + (2c_1 + c_2) \tag{8.3.31}$$

となる．

ここで，a と $a^\dagger$ に対する散逸 Heisenberg 方程式 (8.2.24) を書き下すと，

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega a(t) + c_1 a(t) - (2c_1 + c_2)\, \tilde{a}^{\dagger\dagger}(t), \tag{8.3.32}$$

$$\frac{d}{dt}a^{\dagger\dagger}(t) = i\omega a^{\dagger\dagger}(t) - c_1 a^{\dagger\dagger}(t) - c_2 \tilde{a}(t) \tag{8.3.33}$$

を得る*7．散逸 Heisenberg 方程式 (8.3.32) と (8.3.33) を利用すると，ベクトル $\langle 1|a^{\dagger\dagger}(t)a(t)$ に対する運動方程式

---

*7 半自由場ハット・ハミルトニアン $\hat{H}$ は必ずしもエルミート演算子ではないので，一般に，$a^{\dagger\dagger}(t) \neq (a(t))^\dagger$ である．そこで，エルミート共役 † との混乱を避けるため，記号 ‡ を導入した．ただし，混乱の生じない限り，表記を簡略にするため，‡ のかわりに † を用いる．なお，$\tilde{a}(t) = (a(t))^\sim$ は，常に成立する．

$$\frac{d}{dt}\langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) = -2\kappa(t)\langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) + i\Sigma^{<}(t)\langle 1| \tag{8.3.34}$$

が得られる．ただし，κ と $\Sigma^{<}$ は，それぞれ，

$$\kappa(t) = c_1 + c_2, \quad \Sigma^{<}(t) = i(2c_1 + c_2) \tag{8.3.35}$$

により導入した．(8.3.34) の導出に当たって，チルダ演算子を非チルダ演算子に書き換えるため，**T3** を用いた．

ケット熱真空を (8.3.34) に及ぼすと，一粒子分布関数

$$n(t) = \langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t)|0\rangle = \langle 1|a^{\dagger}a|0(t)\rangle \tag{8.3.36}$$

に対する運動方程式

$$\frac{d}{dt}n(t) = -2\kappa(t)n(t) + i\Sigma^{<}(t) \tag{8.3.37}$$

を得る．(8.3.37) はこの系の Boltzmann 方程式である．関数 $\Sigma^{<}(t)$ は，相互作用ハット・ハミルトニアンが与えられると定められる．

唯一の定常状態しか存在しないと仮定すると，その定常状態は熱平衡状態である．たとえば，熱平衡状態が温度 T の Bose 分布関数：

$$n(t \to \infty) = \bar{n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega/T} - 1} \tag{8.3.38}$$

で特定できるとすると，(8.3.37) より，

$$i\Sigma^{<}(t \to \infty) = 2\kappa(t \to \infty)\bar{n} \tag{8.3.39}$$

を得る．

さてここで，半自由粒子のくり込まれたエネルギー ω とくり込まれた緩和率 κ が時間によらず一定で，半自由粒子固有の特性を表すものと考える．すなわち，$\kappa(t) = \kappa =$ 一定，$i\Sigma^{<}(t) = 2\kappa\bar{n} =$ 一定 とする．その場合，一体分布関数 $n(t)$ の満たす Boltzmann 方程式 (8.3.37) は，

$$\frac{d}{dt}n(t) = -2\kappa\left[n(t) - \bar{n}\right] \tag{8.3.40}$$

となる．また，(8.3.35) を c_1，c_2 に関して解き，それらを (8.3.28) に代入すると，最終的に，定常過程に対応した半自由ハット・ハミルトニアン $\hat{H}$ の最も一般的な表式 [83]：

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{S}} + i\hat{\Pi}, \tag{8.3.41}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = \omega\left(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\right), \tag{8.3.42}$$

$$\hat{\Pi} = -\kappa\left[(1+2\bar{n})\left(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\right) - 2(1+\bar{n})\,a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right] - 2\kappa\bar{n} \tag{8.3.43}$$

が得られる*8．このハット・ハミルトニアンは，緩和理論における射影演算子法に基づいた対応原理（8.4 節参照）により，NETFD の建設当初に導出された表式 [84, 85] と一致している．

8.3.2　初期状態の設定

初期状態のケット熱真空 $|0\rangle = |0(t=0)\rangle$ は，

$$a|0\rangle = f\tilde{a}^\dagger|0\rangle \tag{8.3.44}$$

なる熱状態条件で特定される．ただし，f は実数量である．ここでは，初期相関は無視できるものとしている [90]．一粒子分布関数の初期条件 $n = n\,(t=0)$ は，$\langle 1|a\tilde{a}|0\rangle$ を評価することにより求められる．まず第一に，

$$\langle 1|a\tilde{a}|0\rangle = \langle 1|afa^\dagger|0\rangle = f\left(\langle 1|a^\dagger a|0\rangle + \langle 1|0\rangle\right) = f\,(n+1) \tag{8.3.45}$$

と評価する．ただし，第 1 等号では (8.3.44) のチルダ共役を用い，第 2 等号では正準交換関係 (8.3.26) を利用した．一方，この量は，

*8　緩和演算子 $\hat{\Pi}$ を従来型の形式で扱う場合には，H_{S} が非線形項を含む場合にも，以下の定式化はそのまま成立する．非従来型の形式で扱う場合は，文献 [86, 87, 88, 89] を参照願いたい．

$$\langle 1|a\tilde{a}|0\rangle = \langle 1|\tilde{a}a|0\rangle = \langle 1|a^\dagger a|0\rangle = n \tag{8.3.46}$$

とも評価される．ただし，第 1 等号では **T2**，すなわち，チルダ演算子と非チルダ演算子との可換性を使用し，第 2 等号では **T3**，(8.3.29)，を用いた．(8.3.45) と (8.3.46) を等値すると，

$$n = \frac{f}{1-f} \qquad \left(f = \frac{n}{1+n}\right) \tag{8.3.47}$$

が得られる．

8.3.3 量子マスター方程式

今後は，散逸 Schrödinger 方程式 (8.2.17)：

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle \tag{8.3.48}$$

を，粗視化された系の量子マスター方程式とよぶことにする．無限小時間発展演算子 $\hat{H}$ は，半自由場ハット・ハミルトニアン (8.3.41) である．

初期条件を $\hat{V}(0) = 1$ とする時間発展演算子 $\hat{V}(t)$ を，

$$\frac{d}{dt}\hat{V}(t) = -i\hat{H}\hat{V}(t) \tag{8.3.49}$$

にて導入すると，散逸系における Heisenberg 演算子（散逸 Heisenberg 演算子）は

$$A(t) = \hat{V}^{-1}(t)A\hat{V}(t) \tag{8.3.50}$$

と定義できる．これは，散逸系に対する Heisenberg 方程式

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[\hat{H}(t),\ A(t)] \tag{8.3.51}$$

を満たす．ただし，

$$\hat{H}(t) = \hat{V}(t)^{-1}\hat{H}\hat{V}(t) \tag{8.3.52}$$

は，Heisenberg 表示におけるハット・ハミルトニアンである．不安定熱真空の時間発展は，

$$|0(t)\rangle = \hat{V}(t)|0\rangle \tag{8.3.53}$$

にて与えられる．$\hat{H}$ がチルディアン (8.2.18) であることを用いると，(8.3.49) より，

$$\hat{V}(t)^{\sim} = \hat{V}(t) \tag{8.3.54}$$

となることがわかる．

平均量 $\langle 1|A(t)|0\rangle$ に対する運動方程式は，Heisenberg 方程式 (8.3.51) の真空期待値をとることにより求めることができる：

$$\frac{d}{dt}\langle 1|A(t)|0\rangle = i\langle 1|[\hat{H}(t),\ A(t)]|0\rangle. \tag{8.3.55}$$

同一の方程式は，量子マスター方程式 (8.3.48) を利用して，

$$\frac{d}{dt}\langle 1|A|0(t)\rangle = -i\langle 1|A\hat{H}|0(t)\rangle \tag{8.3.56}$$

によっても得ることができる．

粗視化した演算子に対する Heisenberg 方程式 (8.3.51) が存在することは，NETFD の特記すべき特徴の 1 つである．このことが，散逸量子場に対する正準演算子形式の理論の建設を可能にしている．この理論体系では，Heisenberg 表示における粗視化された演算子 $a(t)$, $a^{\dagger\!\dagger}(t)$ やそれらのチルダ共役演算子は，同時刻正準交換関係

$$[a(t),\ a^{\dagger\!\dagger}(t)] = 1, \qquad [\tilde{a}(t),\ \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)] = 1 \tag{8.3.57}$$

を満たす．

ベクトル $\langle 1|A(t)$ の満たす運動方程式は，非チルダ演算子のみを使って書き下すと，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle 1|A(t) &= i\langle 1|[\hat{H}(t),\ A(t)]\\ &= i\langle 1|[H_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]\\ &\quad -\kappa\left\{\langle 1|[A(t),\ a^{\dagger}(t)]a(t)+\langle 1|a^{\dagger}(t)[a(t),\ A(t)]\right\}\\ &\quad +2\kappa\bar{n}\langle 1|[a(t),\ [A(t),\ a^{\dagger}(t)]]\end{aligned} \tag{8.3.58}$$

となる．ただし，チルダ演算子を非チルダ演算子に置き換えるのに，熱状態条件 (8.3.29) を利用した．ケット熱真空 $|0\rangle$ を (8.3.58) に施すと，平均量に対する運動方程式 (8.3.55) が得られる．

8.3.4 熱ダブレット

熱ダブレット記法を

$$a(t)^{\mu=1}=a(t),\quad a(t)^{\mu=2}=\tilde{a}^{\dagger}(t), \tag{8.3.59}$$

$$\bar{a}(t)^{\mu=1}=a^{\dagger}(t),\quad \bar{a}(t)^{\mu=2}=-\tilde{a}(t) \tag{8.3.60}$$

にて導入する．これを利用すると，正準交換関係は，

$$[a(t)^{\mu},\ \bar{a}(t)^{\nu}]=\delta^{\mu\nu} \tag{8.3.61}$$

と記される．ただし，

$$a(t)^{\mu}=\hat{V}^{-1}(t)a^{\mu}\hat{V}(t),\quad \bar{a}(t)^{\mu}=\hat{V}^{-1}(t)\bar{a}^{\mu}\hat{V}(t) \tag{8.3.62}$$

である．

熱ダブレット記法を利用すると，ハット・ハミルトニアン (8.3.41) は，

$$\hat{H}=\omega\bar{a}^{\mu}a^{\mu}+i\hat{\Pi}+\omega,\quad \hat{\Pi}=-\kappa\bar{a}^{\mu}A^{\mu\nu}a^{\nu}+\kappa \tag{8.3.63}$$

となる．ただし，行列

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+2\bar{n} & -2\bar{n} \\ 2(1+\bar{n}) & -(1+2\bar{n}) \end{pmatrix} \tag{8.3.64}$$

を導入した.

半自由粒子に対する Heisenberg 方程式は,

$$\frac{d}{dt}a(t)^{\mu} = i[\hat{H}(t),\ a(t)^{\mu}] = -i\left[\omega\delta^{\mu\nu} - i\kappa A^{\mu\nu}\right]a(t)^{\nu},$$
$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t)^{\mu} = i[\hat{H}(t),\ \bar{a}(t)^{\mu}] = \bar{a}(t)^{\nu} i\left[\omega\delta^{\nu\mu} - i\kappa A^{\nu\mu}\right] \tag{8.3.65}$$

となる.

8.3.5　生成・消滅演算子

生成・消滅演算子

$$\gamma(t)^{\mu=1} = \gamma(t), \quad \gamma(t)^{\mu=2} = \tilde{\gamma}^{\female}(t), \tag{8.3.66}$$

$$\bar{\gamma}(t)^{\mu=1} = \gamma^{\female}(t), \quad \bar{\gamma}(t)^{\mu=2} = -\tilde{\gamma}(t) \tag{8.3.67}$$

を,

$$\gamma(t)^{\mu} = \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}a(t)^{\nu}, \quad \bar{\gamma}(t)^{\mu} = \bar{a}(t)^{\nu}\mathcal{B}^{-1}(t)^{\nu\mu} \tag{8.3.68}$$

にて導入しよう. ただし,

$$\mathcal{B}(t)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.3.69}$$

は, 時間に依存した Bogoliubov（ボゴリウボフ）変換の行列である. $n(t)$ は, Boltzmann 方程式 (8.3.40) を満たす一粒子分布関数である.

生成・消滅演算子は, 正準交換関係

$$[\gamma(t)^{\mu},\ \bar{\gamma}(t)^{\nu}] = \delta^{\mu\nu} \tag{8.3.70}$$

を満たし，それぞれ，初期時刻のブラ真空，ケット真空を消去する：

$$\gamma(t)|0\rangle \ = 0, \qquad \langle 1|\tilde{\gamma}^{\natural}(t) = 0. \tag{8.3.71}$$

熱ダブレット $\gamma(t)^{\mu}$ の運動方程式は，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\gamma(t)^{\mu} &= \frac{d\mathcal{B}(t)^{\mu\nu}}{dt}a(t)^{\nu} + \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}\frac{d}{dt}a(t)^{\nu} \\
&= \left[\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt}\mathcal{B}^{-1}(t)\right]^{\mu\nu}\gamma(t)^{\nu} - i\left[\mathcal{B}(t)\,(\omega\ 1 - i\kappa A)\,\mathcal{B}^{-1}(t)\right]^{\mu\nu}\gamma(t)^{\nu} \\
&= -i\left[\omega\delta^{\mu\nu} - i\kappa\tau_3^{\mu\nu}\right]\gamma(t)^{\nu}
\end{aligned} \tag{8.3.72}$$

と導き出される．ただし，行列 τ_3 を，

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.3.73}$$

で定義した．(8.3.72) 第 3 等号では，関係

$$\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{dn(t)}{dt}, \tag{8.3.74}$$

$$\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt}\mathcal{B}^{-1}(t) = -\frac{dn(t)}{dt}\tau_+, \tag{8.3.75}$$

$$\mathcal{B}(t)A\mathcal{B}^{-1}(t) = \tau_3 + 2\left[n(t) - \bar{n}\right]\tau_+ \tag{8.3.76}$$

を用いた．ただし，

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.3.77}$$

である．Boltzmann 方程式 (8.3.40) も利用した．

(8.3.72) の解は，

$$\gamma(t)^{\mu} = \exp\left\{-i\left(\omega\delta^{\mu\nu} - i\kappa\tau_3^{\mu\nu}\right)(t-t')\right\}\gamma(t')^{\nu} \tag{8.3.78}$$

と与えられる．この表式より，

$$\begin{aligned}\langle 1|\gamma(t)\gamma^{\text{♀}}(t')|0\rangle &= \mathrm{e}^{-i(\omega-i\kappa)(t-t')}\langle 1|\gamma(t')\gamma^{\text{♀}}(t')|0\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-i(\omega-i\kappa)(t-t')},\end{aligned} \tag{8.3.79}$$

$$\langle 1|\tilde{\gamma}(t')\tilde{\gamma}^{\text{♀}}(t)|0\rangle = \langle 1|\gamma(t')\gamma^{\text{♀}}(t)|0\rangle^{\sim} = \mathrm{e}^{-i(\omega+i\kappa)(t-t')} \tag{8.3.80}$$

が得られる．(8.3.79) の第 2 等号では，同時刻交換関係を使った．(8.3.80) の第 1 等号では，要請 **B3**，(8.2.20)，の熱真空のチルダ不変性を用い，第 2 等号では (8.3.79) を利用した．

8.3.6 時間順序付二点関数（伝播子）

時間順序付二点関数 $G(t,t')^{\mu\nu}$ は，

$$G(t,t')^{\mu\nu} = -i\langle 1|T\left[a(t)^{\mu}\bar{a}(t')^{\nu}\right]|0\rangle = \left[\mathcal{B}^{-1}(t)\mathcal{G}(t,t')\mathcal{B}(t')\right]^{\mu\nu} \tag{8.3.81}$$

の形で与えられる．ただし，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t,t')^{\mu\nu} &= -i\langle 1|T\left[\gamma(t)^{\mu}\bar{\gamma}(t')^{\nu}\right]|0\rangle \\ &= \begin{pmatrix} G^{\mathrm{R}}(t,t') & 0 \\ 0 & G^{\mathrm{A}}(t,t') \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{8.3.82}$$

$$G^{\mathrm{R}}(t,t') = -i\theta(t-t')\mathrm{e}^{-i(\omega-i\kappa)(t-t')}, \tag{8.3.83}$$

$$G^{\mathrm{A}}(t,t') = i\theta(t'-t)\mathrm{e}^{-i(\omega+i\kappa)(t-t')} \tag{8.3.84}$$

である．上記の表式を得るに当たって，解ベクトル (8.3.78) の各成分を利用して多少の計算（式変形）を行った．たとえば，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t,t')^{11} &= -i\langle 1|T[\gamma(t)\gamma(t')^{\text{♀}}]|0\rangle \\ &= -i\left\{\theta(t-t')\langle 1|\gamma(t)\gamma^{\text{♀}}(t')|0\rangle + \theta(t'-t)\langle 1|\gamma^{\text{♀}}(t')\gamma(t)|0\rangle\right\} \\ &= -i\theta(t-t')\mathrm{e}^{-i(\omega-i\kappa)(t-t')} = G^{\mathrm{R}}(t,t') \end{aligned} \tag{8.3.85}$$

のような変形である．第 2 等号で，時間順序付演算子 T の定義を具体的に書き下し，第 3 等号では，(8.3.79) と (8.3.80) を用いた．

8.3.7 熱空間

NETFD の表現空間（熱空間（themal space））は，ブラ熱真空 $\langle 1|$ に消滅演算子 $\gamma(t)$ と $\tilde{\gamma}(t)$ を循環的に作用させてブラ熱ベクトルと，ケット熱真空 $|0\rangle$ に生成演算子 $\gamma^{\text{♀}}(t)$ と $\tilde{\gamma}^{\text{♀}}(t)$ を循環的に作用させて得られるケット熱ベクトルによって張られるベクトル空間である．

正規順（normal ordering）は，この生成・消滅演算子を用いて定義される．すなわち，$\gamma^{\text{♀}}(t)$ や $\tilde{\gamma}^{\text{♀}}(t)$ は $\gamma(t)$ や $\tilde{\gamma}(t)$ の左側に位置させるのである．物理量の演算子を生成・消滅演算子で展開し，正規順で書き下していく過程で，Wick（ヴィック）型の公式を生み出し，ひいては，くり込まれた相互作用表示での多点関数に対する Feynman 型のダイアグラム法へと導かれる．Feynman 型ダイアグラムの内線は，くり込まれた二点関数 (8.3.81) である．

8.3.8 粒子対の凝縮と散逸緩和現象

Schrödinger 表示での生成・消滅演算子

$$\gamma^{\mu=1} = \gamma_t, \qquad \gamma^{\mu=2} = \tilde{\gamma}^{\text{♀}}, \tag{8.3.86}$$

$$\bar{\gamma}^{\mu=1} = \gamma^{\text{♀}}, \qquad \bar{\gamma}^{\mu=2} = -\tilde{\gamma}_t \tag{8.3.87}$$

を，関係式

$$\gamma(t)^{\mu} = \hat{V}^{-1}(t)\gamma_t^{\mu}\hat{V}(t), \qquad \bar{\gamma}(t)^{\mu} = \hat{V}^{-1}(t)\bar{\gamma}_t^{\mu}\hat{V}(t) \tag{8.3.88}$$

にて導入する．ただし，$\hat{V}(t)$ は (8.3.49) で特定される．この生成・消滅演算子を用いて正規順で表すと，ハット・ハミルトニアン (8.3.41) は，

$$\hat{H} = \omega\left(\gamma^{\text{♀}}\gamma_t - \tilde{\gamma}^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_t\right) - i\hat{\Pi}, \tag{8.3.89}$$

$$\hat{\Pi} = -\kappa\left(\gamma^{\text{♀}}\gamma_t + \tilde{\gamma}^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_t + 2\left[n(t) - \bar{n}\right]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}\right) \tag{8.3.90}$$

となる．これは，ダブレット記法 (8.3.63) を利用すると簡単に求められる．

(8.3.89) を量子マスター方程式 (8.3.48) に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -2\kappa\left[n(t) - \bar{n}\right]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}|0(t)\rangle = \frac{dn(t)}{dt}\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}|0(t)\rangle \tag{8.3.91}$$

を得る．第 2 等号で，Boltzmann 方程式 (8.3.40) を用いた．(8.3.91) を解くと，その解は

$$|0(t)\rangle = \exp\left[\int_0^t dt' \frac{dn(t')}{dt'}\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}\right]|0\rangle = \exp\left[\left[n(t) - n(0)\right]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}\right]|0\rangle \tag{8.3.92}$$

となる．この表式より，「不安定熱真空の時間発展が $\gamma_k^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_k^{\text{♀}}$ 粒子対の真空への凝縮により実現していると解釈できる」ことがわかる．文献 [91] で初めて発見されたこの魅惑的な表式 (8.3.92) は，散逸の自発的発現（spontanious creation of dissipation）[92] という機構の存在を予感させるものである．なお，(8.3.92) の結果が，演算子代数の運用のみで得られたものであることは特筆に値する．通常の量子力学や場の量子論と類似の演算子代数が NETFD においても存在することが，平衡状態から遠い非平衡状態の取り扱いを簡単で見通しのよいものにしているのである．

熱真空（thermal vacuum）が一粒子分布関数 $n_k(t)$ の汎関数として与えられることも明らかになった．熱真空の $n_k(t)$ 依存性は，

$$\frac{\delta}{\delta n_k(t)}|0(t)\rangle = \gamma_k^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_k^{\text{♀}}|0(t)\rangle \tag{8.3.93}$$

で与えられる．熱真空 $|0(t)\rangle$ は，一粒子分布関数 $n_k(t)$ で記述される巨視的物体の状態を表しているのである．(8.3.93) を (8.3.91) に代入すると，量子マスター方程式 (8.3.48) は，

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \int d^3k\ \frac{dn_k(t)}{dt}\frac{\delta}{\delta n_k(t)}\right\}|0(t)\rangle = 0 \tag{8.3.94}$$

と表せることがわかる．これより，参照真空（reference vacuum）は，一粒子分布関数 $\{n_k(t)\}$ で張られる超表現空間の中を，「速度」$\{dn_k(t)/dt\}$ で渡り歩いているという描像が得られる．

生成・消滅演算子は

$$\gamma_t|0(t)\rangle\ = 0, \qquad \langle 1|\tilde{\gamma}^{\natural} = 0 \tag{8.3.95}$$

を満たすので，ハット・ハミルトニアン $\hat{H}$ の正規順での表式 (8.3.89), (8.3.90) より，**B2**, (8.2.19), の成立がただちに見てとれる．

8.3.9　ハット・ハミルトニアンの対角化

ハット・ハミルトニアン (8.3.41) は,

$$\hat{H} = \omega\left(d^\dagger d - \tilde{d}^\dagger \tilde{d}\right) - i\kappa\left(d^\dagger d + \tilde{d}^\dagger \tilde{d}\right) \tag{8.3.96}$$

の対角形にも書き下せる．ただし,

$$d^{\mu=1} = d, \qquad d^{\mu=2} = \tilde{d}^\dagger, \tag{8.3.97}$$

$$\bar{d}^{\mu=1} = d^\dagger, \qquad \bar{d}^{\mu=2} = -\tilde{d} \tag{8.3.98}$$

は,

$$d^\mu = \mathcal{B}_T^{\mu\nu} a^\nu, \qquad \bar{d}^\mu = \bar{a}^\nu \mathcal{B}_T^{-1\nu\mu} \tag{8.3.99}$$

$$\mathcal{B}_T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+\bar{n} & -\bar{n} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\omega/T}-1} \tag{8.3.100}$$

で導入した．

ケット熱真空 $|0\rangle\ =\ |0(t=0)\rangle$ は，(8.3.44) によって特定されるが，これは，d と $\tilde{d}^\dagger$ を用いて

$$d|0\rangle\ = (n-\bar{n})\ \tilde{d}^\dagger|0\rangle \tag{8.3.101}$$

と記すこともできる．

ハット・ハミルトニアン $\hat{H}$ の対角表式 (8.3.96) により，

$$d(t) = \hat{V}^{-1}(t)\ d\ \hat{V}(t) = d\ \mathrm{e}^{-(i\omega+\kappa)t}, \tag{8.3.102}$$

$$\tilde{d}^{\dagger\dagger}(t) = \hat{V}^{-1}(t)\ \tilde{d}^{\dagger}\ \hat{V}(t) = \tilde{d}^{\dagger}\ \mathrm{e}^{-(i\omega-\kappa)t} \tag{8.3.103}$$

であることが容易に見てとれる．

$\hat{H}$ を対角的にする演算子と $\hat{H}$ を正規積の形に書き下すための生成・消滅演算子が異なることは，NETFD の大きな特徴の 1 つである．それらの演算子間には，

$$\gamma_t = d + [\bar{n} - n(t)]\,\tilde{d}^{\dagger}, \quad \tilde{\gamma}^{♀} = \tilde{d}^{\dagger} \tag{8.3.104}$$

の関係がある．この相違は，NETFD の体系が通常の量子力学や場の量子論とは異なることを示している．すなわち，ハット・ハミルトニアンが不可逆過程の無限小時間発展演算子であることの表れである．なお，熱平衡状態では $n(t) = \bar{n}$ が満たされるので，$\hat{H}$ を対角的にする演算子と $\hat{H}$ を正規積の形に書き下すための演算子は同一となる．

8.3.10 不可逆性

ここで，系の不可逆性をチェックしてみよう．熱力学が教えるところによると，注目系のエントロピー変化 $d\mathcal{S}$ は，

$$d\mathcal{S} = d\mathcal{S}_{\mathrm{e}} + d\mathcal{S}_{\mathrm{i}} \tag{8.3.105}$$

で与えられる．右辺第 1 項の $d\mathcal{S}_{\mathrm{e}}$ は，外部系（あるいは，環境系）から注目系への熱の流入 $(d'Q > 0)$ や流出 $(d'Q < 0)$ に起因するエントロピー変化を表し，

$$d\mathcal{S}_{\mathrm{e}} = \frac{d'Q}{T} \tag{8.3.106}$$

で与えられる．ただし，T は，注目系が熱をやり取りしている「環境系」の温度である．一方，右辺第 2 項の $d\mathcal{S}_{\mathrm{i}}$ は，注目系内で起こる熱の流れに伴うエントロピー変化を表し，常に

$$dS_\mathrm{i} \geq 0 \tag{8.3.107}$$

が成立する．この不等式が，熱力学第 2 法則である．正値 dS_i の大小は，不可逆性の度合いの大小を表す．最小値 $dS_\mathrm{i} = 0$ へは，注目系が可逆変化をしている場合にのみ到達できる．

さて，注目系のエントロピーは，一粒子分布関数 $n(t)$ を用いて，

$$\mathcal{S}(t) = -\{n(t)\ln n(t) - [1+n(t)]\ln[1+n(t)]\} \tag{8.3.108}$$

で与えられる．一方，注目系の熱量変化 $d'Q$ は，

$$d'Q = \omega dn \tag{8.3.109}$$

と記述される．

(8.3.108) と (8.3.109) を代入した (8.3.106) とを，それぞれ，(8.3.105) の $d\mathcal{S}$ と $d\mathcal{S}_\mathrm{e}$ に代入すると，エントロピー生成率に対する関係式 [93]

$$\frac{d\mathcal{S}_\mathrm{i}}{dt} = \frac{d\mathcal{S}}{dt} - \frac{d\mathcal{S}_\mathrm{e}}{dt} = 2\kappa[n(t) - \bar{n}]\ln\frac{n(t)[1+\bar{n}]}{\bar{n}[1+n(t)]} \geq 0 \tag{8.3.110}$$

が得られる．ただし，

$$\bar{n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega/T} - 1} \tag{8.3.111}$$

である．(8.3.110) の第 1 等号で，Boltzmann 方程式 (8.3.40) を用いた．第 2 等号の右辺の表式が最後の不等式を満たすことは容易く確認できる．(8.3.110) は，熱力学第 2 法則 (8.3.107) が成立していることを表している．等号は，熱平衡状態 $n(t) = \bar{n}$ の場合か，準静的過程 $\kappa \to 0$ の場合である．

8.4 対応原理による半自由場ハット・ハミルトニアンの導出

前節では，半自由場ハット・ハミルトニアンを公理に基づいて導出した．この節では，注目系密度演算子に対する量子マスター方程式に「対応原理」を利用するこ

とにより，半自由場ハット・ハミルトニアンが得られることを紹介する．

注目系のハミルトニアンを H_{S} とすると，その系の量子マスター方程式は，一般的に

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{S}}(t) = -i\left(H_{\mathrm{S}}^{\times} + i\Pi\right)\rho_{\mathrm{S}}(t) \tag{8.4.112}$$

の形で与えられる．ただし，

$$H_{\mathrm{S}}^{\times}X = [H_{\mathrm{S}},\ X], \tag{8.4.113}$$

Π は緩和超演算子である．

対応原理：

$$\rho_{\mathrm{S}}(t) \longleftrightarrow |0(t)\rangle, \tag{8.4.114}$$

$$A_1\rho_{\mathrm{S}}(t)A_2 \longleftrightarrow A_1\tilde{A_2}^{\dagger}|0(t)\rangle \tag{8.4.115}$$

により，量子マスター方程式 (8.4.112) が，NETFD における散逸 Schrödinger 方程式 (8.2.17)：

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}\ |0(t)\rangle, \tag{8.4.116}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{S}} + i\hat{\Pi} \tag{8.4.117}$$

に変換できるのである [84, 85]．ただし，

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = H_{\mathrm{S}} - \tilde{H}_{\mathrm{S}} \tag{8.4.118}$$

であり，$\hat{\Pi}$ は Π から対応原理で得られる NETFD における緩和演算子である．

2 種類の演算子を導入すると，Liouville-von Neumann 方程式が Schrödinger 方程式と同じ形式に書けることを初めて指摘したのは，Crawford [94] である．Liouville-von Neumann 方程式に上記の対応原理を使用すると熱平衡系 TFD の時間発展ハミルトニアン (8.4.118) が得られることは，Schmutz [95] により初めて指摘された．緩和演算子を有する量子マスター方程式に対応原理を応用して，散逸量子系を扱う正準演算子形式の理論体系が構築できることを初めて示したのは，

NETFD [84] である．

8.4.1 ボソン系

ボソン系に対する量子マスター方程式 (8.4.116) の緩和超演算子

$$\varPi X = \kappa \left([aX,\ a^\dagger] + [a,\ Xa^\dagger]\right) + 2\kappa\bar{n}[a,\ [X,\ a^\dagger]] \tag{8.4.119}$$

の $\rho_{\rm S}(t)$ への作用に対応原理を利用すると，NETFD の緩和演算子 (8.3.43) が得られる．

8.4.2 スピン系

スピン系に対する量子マスター方程式 (8.4.116) のハミルトニアン $H_{\rm S}$ と緩和超演算子 $\varPi$ は，(4.1.4) より，それぞれ，

$$H_{\rm S} = (\omega + \delta\omega)s^z + \varDelta_1 (s^z)^2 + \varDelta_2 s^+ s^-, \tag{8.4.120}$$

$$\begin{aligned} \varPi X = &-\frac{1}{2}\gamma_{10}\left([s^- X,\ s^+] + [s^-,\ Xs^+]\right) \\ &+\frac{1}{2}\gamma_{01}\left([s^+ X,\ s^-] + [s^+,\ Xs^-]\right) \\ &-\frac{1}{2}\zeta\left([s^z X,\ s^z] + [s^z,\ Xs^z]\right) \end{aligned} \tag{8.4.121}$$

で与えられる．ただし，

$$\delta\omega = -2\phi''_{+-}, \quad \varDelta_1 = \phi''_{zz}, \quad \varDelta_2 = \phi''_{-+} + \phi''_{+-}, \tag{8.4.122}$$

$$\gamma_{10} = 2\phi'_{-+}, \quad \gamma_{01} = 2\phi'_{+-}, \quad \zeta = 2\phi'_{zz}. \tag{8.4.123}$$

ここで，(4.1.4) 中の各種 $\phi(t)$ を $\phi(t) = \phi' + i\phi''$ とおいた[*9]．

緩和超演算子 $\varPi$，(8.4.121)，の $\rho_{\rm S}(t)$ への作用に対応原理を利用すると，NETFD での緩和演算子

---

*9　ϕ 関数の起源が熱浴モデルの場合には，長時間極限をとった $\phi(\infty)$ を考える．以下では主に，熱浴モデルの場合を想定して話を進める．

$$\hat{\Pi} = -\frac{1}{2}\gamma_{10}\left[\left(s^{+} - \tilde{s}^{-}\right)s^{-} + \left(\tilde{s}^{+} - s^{-}\right)\tilde{s}^{-}\right] + \frac{1}{2}\gamma_{01}\left[\left(s^{+} - \tilde{s}^{-}\right)\tilde{s}^{+} + \left(\tilde{s}^{+} - s^{-}\right)s^{+}\right] - \frac{1}{2}\zeta\left(s^{z} - \tilde{s}^{z}\right)^{2} \tag{8.4.124}$$

が得られる．なお，この $\hat{\Pi}$ の公理的な導出は，文献 [87] で成されている．

8.5 演算子絡みを解く他の方法（c-数空間への写像）との関連

前節までで見てきたように，NETFD は，Liouville 演算子（超演算子）と密度演算子（統計演算子）の絡み，すなわち，「演算子の絡み」を，正準演算子形式のままほどく方法を提供した．ここでは，量子 Louville 方程式を c-数空間に写像することにより，演算子の絡みを解消する手法を紹介する．

8.5.1 量子マスター方程式

例として，緩和振動子の量子マスター方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{S}}(t) = -i\left(H_{\mathrm{S}}^{\times} + i\Pi\right)\rho_{\mathrm{S}}(t) \tag{8.5.125}$$

を考える．ただし，Liouville 演算子 $H_{\mathrm{S}}^{\times}$，Π の作用は，

$$H_{\mathrm{S}}^{\times}X = [H_{\mathrm{S}},\ X], \tag{8.5.126}$$

$$\Pi X = \kappa\left([aX,\ a^{\dagger}] + [a,\ Xa^{\dagger}]\right) + 2\kappa\bar{n}[a,\ [X,\ a^{\dagger}]] \tag{8.5.127}$$

で与えられる．系のハミルトニアン H_{S} は，

$$H_{\mathrm{S}} = \omega a^{\dagger}a, \qquad \omega = \epsilon - \mu \tag{8.5.128}$$

である．ただし，$a^{\dagger}$, a はボソン生成・消滅演算子で，正準交換関係

$$[a,\ a^{\dagger}] = 1 \tag{8.5.129}$$

を満たす．ϵ, μ, $\kappa\,(>0)$, $\bar{n}$ は，それぞれ，一粒子エネルギー，化学ポテンシャル，

緩和率，Planck 分布関数：

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\omega/T} - 1} \tag{8.5.130}$$

である．

量子マスター方程式 (8.5.125) は，(4.3.100) で導出された方程式において，環境系の定常性を仮定すると導出される．この仮定の下では，角振動数 ω や緩和率 κ などが時間に依存しなくなる．

8.5.2 c-数空間への写像

量子マスター方程式 (8.5.125) を c-数空間に写像すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_{\mathrm{S}}(z,t) = \Bigg[&-i\omega \left(\frac{\partial}{\partial z^*} z^* - \mathrm{c.c.} \right) + \kappa \left(\frac{\partial}{\partial z^*} z^* + \mathrm{c.c.} \right) \\ &+ 2\kappa \left(\bar{n} + \nu \right) \frac{\partial^2}{\partial z^* \partial z} \Bigg] f_{\mathrm{S}}(z,t)\end{aligned} \tag{8.5.131}$$

と焼き直される．これは，引数 z が複素数で，$f_{\mathrm{S}}(z,t) = f_{\mathrm{S}}(z,t)^*$ を満たす実数値 c-数関数に対する Fokker-Planck 方程式型の偏微分方程式である．$\nu = 0$ は P 表示，$\nu = \frac{1}{2}$ は Wigner 表示，$\nu = 1$ は Q 表示における Fokker-Planck 方程式である*10．量子マスター方程式 (8.5.125) の密度演算子 $\rho_{\mathrm{S}}(t)$ がこうむっていた超演算子に由来する演算子との複雑な絡みが，c-数関数 $f_{\mathrm{S}}(z,t)$ への偏微分演算子となることで，ほどけていることがわかる．

さて，Fokker-Planck 方程式 (8.5.131) を解くことを考えよう*11．新しい関数

$$\phi(|z|^2, t) = e^{it\omega\left(\frac{\partial}{\partial z^*} z^* - \frac{\partial}{\partial z} z\right)} f_{\mathrm{S}}(z,t) \tag{8.5.132}$$

を導入すると，Fokker-Planck 方程式 (8.5.131) は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\xi,t) = 2\kappa \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\xi + \bar{n}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \phi(\xi,t) \tag{8.5.133}$$

---

*10　4.3.1 項に現れる指標 s とここでの指標 ν は，$\nu = (1+s)/2$ で結ばれている．

*11　量子マスター方程式を c-数空間に写像する一般論は，付録 A.2 節を参照のこと．そこでは，ここのものとは別の解法も与えられている．

となる．ただし，$\xi=|z|^2$ とおいた．さらに，

$$\phi(\xi,t)=u(\zeta)\mathrm{e}^{-2\kappa pt} \tag{8.5.134}$$

を (8.5.133) に代入し，変数 $\zeta=\xi/(\bar{n}+\nu)$ に関する常微分方程式に書き直すと，右側固有関数に対する固有値方程式

$$\zeta\frac{d^2u(\zeta)}{d\zeta^2}+(1+\zeta)\frac{du(\zeta)}{d\zeta}+u(\zeta)=-pu(\zeta) \tag{8.5.135}$$

が得られる．(8.5.135) に共役な常微分方程式（すなわち，左側固有関数に対する固有値方程式）は，

$$\zeta\frac{d^2v(\zeta)}{d\zeta^2}+(1-\zeta)\frac{dv(\zeta)}{d\zeta}=-pv(\zeta) \tag{8.5.136}$$

である．これは，

$$\int_0^\infty d\zeta\ v(\zeta)\left[\zeta\frac{d^2}{d\zeta^2}+(1+\zeta)\frac{d}{d\zeta}+1+p\right]u(\zeta)=0 \tag{8.5.137}$$

を，部分積分することにより導出される．

なお，興味深いことに，$u(\zeta)$ と $v(\zeta)$ の間には，

$$u(\zeta)=\mathrm{e}^{-\zeta}v(\zeta) \tag{8.5.138}$$

の関係があることが確かめられる．

8.5.3 固有値方程式 (8.5.136) の解法

$v(\zeta)$ の固有値方程式 (8.5.136) と Laguerre（ラゲール）多項式 $L_\ell(\zeta)$ が満たす (A.8.218) を比較すると，固有値 p は

$$p=\ell \qquad (\ell=0,1,2,\cdots) \tag{8.5.139}$$

で与えられるべきことがわかる．また，固有値 ℓ に属する左側固有関数 $v_\ell(\zeta)$ と右側固有関数 $u_\ell(\zeta)$ が，

$$v_\ell(\zeta)=L_\ell(\zeta),\quad u_\ell(\zeta)=L_\ell(\zeta)\mathrm{e}^{-\zeta} \tag{8.5.140}$$

で与えられることもわかる.

Laguerre 多項式が満たす直交性 (A.8.236) より，左右固有関数の直交性

$$\int_0^\infty d\zeta v_\ell(\zeta)u_m(\zeta)=\delta_{\ell m} \tag{8.5.141}$$

が得られる．ここで，任意の関数 $\psi(\zeta)$ を

$$\psi(\zeta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell u_\ell(\zeta) \tag{8.5.142}$$

と展開する．展開係数 a_ℓ は，直交性 (8.5.141) より，

$$a_\ell=\int_0^\infty d\zeta v_\ell(\zeta)\psi(\zeta) \tag{8.5.143}$$

と求まる．これを (8.5.142) に代入すると，

$$\psi(\zeta)=\int_0^\infty d\zeta'\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}u_\ell(\zeta)v_\ell(\zeta')\right]\psi(\zeta') \tag{8.5.144}$$

となる．これより，完全性

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}u_\ell(\zeta)v_\ell(\zeta')=\delta(\zeta-\zeta') \tag{8.5.145}$$

を得る*12.

*12 右側固有関数 $u_\ell(\zeta)$ は $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}_+)$ でありノルムが定義できるが，左側固有関数 $v_\ell(\zeta)$ ではノルムが定義できない．固有ベクトル $u_\ell(\zeta)$ と $v_\ell(\zeta)$ は，それぞれ，「Gel'fand（ゲルファント）三つ組」あるいは「装備された Hilbert 空間（rigged Hilbert space)」における核空間（nuclear space）に属するベクトル，その双対空間に属するベクトルと捉えられる [96].

8.5.4 Fokker-Planck 方程式 (8.5.133) の解

上で求めた固有関数を用いて，Fokker-Planck 方程式 (8.5.133) の解 $\phi(\xi, t)$ を

$$\phi(\zeta(\bar{n}+s), t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell u_\ell(\zeta) \mathrm{e}^{-2\kappa\ell t} \tag{8.5.146}$$

と展開し，初期条件

$$\phi(\xi, 0) = f_{\mathrm{S}}(\xi, 0) = \frac{1}{n+s}\mathrm{e}^{-\xi/(n+s)} \tag{8.5.147}$$

の下に求めてみよう．

初期条件を利用して求まる展開係数

$$a_\ell = \frac{1}{n+s}\int_0^\infty d\zeta' v_\ell(\zeta')\mathrm{e}^{-\zeta'(\bar{n}+s)/(n+s)} \tag{8.5.148}$$

を (8.5.146) に代入すると，(8.5.133) の解が，

$$\begin{aligned}
\phi(\zeta(\bar{n}+s), t) &= \frac{1}{n+s}\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_0^\infty d\zeta' v_\ell(\zeta')u_\ell(\zeta)\ \mathrm{e}^{-\zeta'(\bar{n}+s)/(n+s)}\ \mathrm{e}^{-2\kappa\ell t} \\
&= \frac{1}{n+s}\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_0^\infty d\zeta' v_\ell(\zeta')u_\ell(\zeta)\ \mathrm{e}^{-\zeta'}\ \mathrm{e}^{-\zeta'(\bar{n}-n)/(n+s)}\ \mathrm{e}^{-2\kappa\ell t} \\
&= \frac{1}{\bar{n}+s}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_\ell(\zeta)\left(\frac{\bar{n}-n}{\bar{n}+s}\right)^k \mathrm{e}^{-2\kappa\ell t}\int_0^\infty d\zeta' v_\ell(\zeta')u_k(\zeta') \\
&= \frac{1}{\bar{n}+s}\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell(\zeta)\left(\frac{\bar{n}-n}{\bar{n}+s}\right)^\ell \mathrm{e}^{-2\kappa\ell t} \\
&= \frac{1}{\bar{n}+s}\mathrm{e}^{-\zeta}\sum_{\ell=0}^{\infty} v_\ell(\zeta)\left(\frac{\bar{n}-n}{\bar{n}+s}\mathrm{e}^{-2\kappa t}\right)^\ell \\
&= \frac{1}{n(t)+s}\mathrm{e}^{-\xi/(n(t)+s)}
\end{aligned} \tag{8.5.149}$$

と求まる．ただし，

$$n(t)=\bar{n}+(n-\bar{n})\,\mathrm{e}^{-2\kappa t} \tag{8.5.150}$$

である．これは，初期条件 $n(0)=n$ の下での Boltzmann 方程式 (8.3.40) の解となっている．なお，(8.5.149) の第 3 等号では，$\mathrm{e}^{-\zeta'(\bar{n}-n)/n}$ を Laguerre 多項式の母関数 (A.8.215) と見なして展開し，さらに (8.5.140) を用いて右側固有関数としてまとめた．第 4 等号では直交性 (8.5.141) を使い，最後の等号では (8.5.140) と (A.8.215) を再び利用した．

ところで，NETFD で，ブラ真空を $\langle 1|$ のように "0" ではなく "1" を用いて記した理由の 1 つは，最低固有値 $\ell=0$ に属する左側固有関数が

$$v_0(\zeta)=1 \tag{8.5.151}$$

であることによる*13．なお，ケット真空 $|0(t)\rangle$ は $\phi(\zeta(\bar{n}+s),t)$ に対応している．

*13　もう 1 つの理由は，Tr 演算が，$\sum_n |n\rangle\langle n|=1$ と関連しているためである．

第9章

確率場の量子論（Stochastic NETFD）

励起状態にある原子や分子の集団が，誘導放射により位相のそろったコヒーレント光を発するレーザー現象の解明には，自然放出（自発放射）を量子ゆらぎとして扱う必要があった（たとえば，文献 [97] 参照）．その流れで，Senitzky [98], Lax [99] や柴田・橋爪 [101] によりはじめられた微視的な立場からの量子 Langevin 方程式導出の試み（第 7 章参照）は，必然的に，数学的な（微視的系を意識しない）立場からの量子確率微分方程式の体系建設を促した．その試みは，Streater [102] によってはじめられたといってよかろう．その後，満足できる体系の確立を目指して研究が進められているが [103, 104, 105, 106, 107]，数学者（あるいは，数学的な立場）による量子 Langevin 方程式の定式化では，そのほとんどが乱雑力の非可換性を拠り所としている（文献 [108] 中のコメントも参照のこと）．

この章では，量子確率微分方程式に対する正準演算子形式の体系が，乱雑力演算子の非可換性を拠り所にすることなく，NETFD の枠組にて構築できることを示す（図 8.1 の最下段） [109, 110, 111]．まず，9.1 節で，Streater による量子 Langevin 方程式の導出を紹介し，その問題点を明らかにする．9.2 節で，量子 Brown 運動を有限温度の乱雑力演算子を記述する熱的 Brown 運動へと拡張する．その上で，9.3 節にて，量子確率微分方程式の正準演算子形式の体系を，NETFD の枠組で構築する．9.4 節では，9.3 節で定式化された量子確率微分方程式の体系を，半自由ボソン系に適用する．マルチンゲール演算子を導出し，その非可換性がいかなる形で影響を与えるのかを系統的に調査する．スピン系への応用は，9.5 節で成される．9.6 節では，3.4 節で扱った森の公式 [100] を，NETFD の観点で再導出する．9.7 節では，柴田・橋爪 [101] による量子 Langevin 方程式（S-H Langevin 方程式）の導出を，NETFD の体系にて再構築する．

9.1 Streaterによる量子Langevin方程式の導出

量子散逸系では，たとえば，乱雑力演算子を乱雑平均して得られる演算子 $\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}}$ と $\langle a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}}$ は，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}} = -i\omega\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}} - \kappa\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}}, \tag{9.1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\langle a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}} = i\omega\langle a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}} - \kappa\langle a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}} \tag{9.1.2}$$

を満たす．初期条件は，

$$\langle a(0)\rangle_{\mathrm{R}} = a, \quad \langle a^\dagger(0)\rangle_{\mathrm{R}} = a^\dagger \tag{9.1.3}$$

で与えられるものとする．ただし，a と $a^\dagger$ は正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1 \tag{9.1.4}$$

を満たす．乱雑平均をとった演算子 $\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}}$ と $\langle a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}}$ に対する同時刻正準交換関係は，時間とともに緩和してしまう*1：

$$[\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}},\ \langle a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}}] = \mathrm{e}^{-2\kappa t}. \tag{9.1.5}$$

これは，時間の経過とともに，演算子の非可換性が消失してしまうことを示している．

Streater [102] は，量子系の Langevin 方程式を導入するに当たって，「乱雑力演算子は，同時刻正準交換関係を保存させる機能をもつべきもの」という問題設定（要請）を行った．すなわち，(9.1.1), (9.1.2) に乱雑力演算子 $df(t)$ と $df^\dagger(t)$ を導入して書き下した量子 Langevin 方程式

*1　前章で導入した散逸場の量子論 NETFD の体系では，散逸ボソン系の生成・消滅演算子 $a^\dagger(t)$，$a(t)$（ここでの，$\langle a^\dagger(t)\rangle_{\mathrm{R}}$, $\langle a(t)\rangle_{\mathrm{R}}$ に相当する演算子）に対して，同時刻正準交換関係 (8.3.57) が成立する．NETFD では，2種類の演算子（非チルダ演算子とチルダ演算子）を導入したことにより，散逸系においても同時刻正準交換関係の緩和を回避できるのである．

$$da(t) = -i\omega a(t)dt - \kappa a(t)dt + \sqrt{2\kappa}\ df(t), \tag{9.1.6}$$

$$da^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t)dt - \kappa a^\dagger(t)dt + \sqrt{2\kappa}\ df^\dagger(t) \tag{9.1.7}$$

において，確率的演算子 $a(t)$ と $a^\dagger(t)$ に対する同時刻正準交換関係が時間に関して保存すること，すなわち

$$d\left([a(t),\ a^\dagger(t)]\right) = 0 \tag{9.1.8}$$

を課したのである*2. 以下で示すように，この要請から，乱雑力演算子 $df(t)$ と $df^\dagger(t)$ が同時刻交換関係

$$[df(t),\ df^\dagger(t)] = dt \tag{9.1.9}$$

を満たす必要のあることが導かれる．その導出は [102],

$$\begin{aligned} d\left([a(t),\ a^\dagger(t)]\right) &= [da(t) \circ a^\dagger(t)] + [a(t) \circ da^\dagger(t)] \\ &= -2\kappa dt + \sqrt{2\kappa}\left([df(t) \circ a^\dagger(t)] + [a(t) \circ df^\dagger(t)]\right) \\ &= -2\kappa dt + 2\kappa[df(t),\ df^\dagger(t)] = 0 \end{aligned} \tag{9.1.10}$$

である．ただし，$[X \circ Y]$ は Stratonovich 型確率積 [112] による交換子である（付録 A.7 節参照）．この確率積においては，第 1 等号のように，通常の解析関数に対する微分演算が適用できる（7.1 節参照）．第 2 等号で，Langevin 方程式 (9.1.6), (9.1.7) を代入した．第 3 等号では，

$$\begin{aligned} [df(t) \circ\ a^\dagger(t)] &= [df(t);\ a^\dagger(t)] + \frac{1}{2}[df(t);\ da^\dagger(t)] \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}(i\omega - \kappa)\,dt\right)[df(t);\ a^\dagger(t)] + \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\ [df(t),\ df^\dagger(t)] \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{2}}\ [df(t),\ df^\dagger(t)], \end{aligned} \tag{9.1.11}$$

---

*2 (9.1.8) は，(9.1.4) を考慮すると，任意の時刻 t (>0) で，$[a(t),\ a^\dagger(t)] = 1$ が成立していることを意味する．

および，同様にして導出した

$$[a(t) \overset{\circ}{,} \ df^\dagger(t)] = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \ [df(t), \ df^\dagger(t)] \tag{9.1.12}$$

を用いている．ただし，(9.1.11) の第1等号では，伊藤型確率積と Stratonovich 型確率積の変換公式 (A.7.211),(A.7.212) を用いた．$[X; \ Y]$ は伊藤型確率積による交換子である（付録 A.7 節参照）．(9.1.11) の第3等号では，伊藤型確率積で成立する可換性

$$[df(t); \ a^\dagger(t)] = 0, \quad [a(t); \ df^\dagger(t)] = 0 \tag{9.1.13}$$

を利用している．(9.1.10) の最後の等号は，要請 (9.1.8) である．

さて，(9.1.6), (9.1.7) は，それぞれ，(7.2.74)，および，そのエルミート共役と同一である．結果 (9.1.9) は，量子 Brown 運動が満たす関係 (7.2.82) と同じである．ここで成された Langevin 方程式に関する議論は，量子 Brown 運動の乱雑平均を (7.2.83) などとすれば，零点振動にまつわる量子ゆらぎ（自然放出）のものだけでなく，有限温度の熱ゆらぎをも含んだ議論のはずである．つまり，自然界は本質的に量子系であるが，その熱現象を記述する正準理論（正準交換関係が時間的に保存する理論）は，乱雑力の量子力学的な非可換性を拠り所にすれば可能であることを示しているのである．そう解釈してくると，次の本質的な疑問が生じる．それは，「もし，自然界が，熱過程を含んだ現象も正準演算子理論として構成できることを望んでいるのなら，熱的散逸の起源に量子的非可換性が深くかかわっていると解釈すべきであるのか？」というものである．

以下この章では，NETFD の体系では，乱雑力演算子の非可換性を拠り所とせずに，量子確率微分方程式に対する正準演算子の理論体系が定式化できることを示す*3.

9.2 熱的量子 Brown 運動の導入

7.3 節で導入した量子 Brown 運動は，量子ゆらぎのみに対するものである．こ

*3 したがって，上記の疑問に対しては，「たとえ自然が熱過程を含んだ現象も正準演算子理論として構成できることを望んでいたとしても，熱的散逸現象の起源には，必ずしも量子的非可換性がかかわっている必要はない」という結論になる．

こでは，その議論を NETFD における熱空間に組み込み，有限温度における熱ゆらぎに対する量子 Brown 運動を導入する*4.

9.2.1 熱的量子 Brown 運動

時刻 $t \geq 0$ に対する熱空間の演算子

$$B_t = \int_0^t dt'\ b_{t'}, \quad B_t^\dagger = \int_0^t dt'\ b_{t'}^\dagger, \tag{9.2.14}$$

$$\tilde{B}_t = \int_0^t dt'\ \tilde{b}_{t'}, \quad \tilde{B}_t^\dagger = \int_0^t dt'\ \tilde{b}_{t'}^\dagger \tag{9.2.15}$$

を導入する．量子白色雑音の生成・消滅演算子 $b_t^\dagger$, b_t および $\tilde{b}_t^\dagger$, $\tilde{b}_t$ は，正準交換関係

$$[b_t,\ b_{t'}^\dagger] = \delta(t-t'), \quad [\tilde{b}_t,\ \tilde{b}_{t'}^\dagger] = \delta(t-t') \tag{9.2.16}$$

を満たすものとする．ただし，他の組み合わせの交換関係はゼロである（たとえば，$[b_t,\ \tilde{b}_{t'}^\dagger] = 0$ など）．熱空間の真空 $|0,\tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$ と $\langle 0,\tilde{0}| = \langle 0| \otimes \langle\tilde{0}|$ を，

$$b_t|0,\tilde{0}\rangle = 0, \quad \tilde{b}_t|0,\tilde{0}\rangle = 0, \quad \langle 0,\tilde{0}|b_t^\dagger = 0, \quad \langle 0,\tilde{0}|\tilde{b}_t^\dagger = 0 \tag{9.2.17}$$

にて導入する．

B_t, $B_t^\dagger$, $\tilde{B}_t$, $\tilde{B}_t^\dagger$ は，その定義より，

$$B_{t=0} = 0, \quad B_{t=0}^\dagger = 0, \quad \tilde{B}_{t=0} = 0, \quad \tilde{B}_{t=0}^\dagger = 0 \tag{9.2.18}$$

および，(7.3.96) と同様の計算により，交換関係

$$[B_s,\ B_t^\dagger] = \min(s,t), \quad [\tilde{B}_s,\ \tilde{B}_t^\dagger] = \min(s,t) \tag{9.2.19}$$

を満たしていることがわかる（ただし，他の組み合わせの交換関係はゼロ）．これ

---

*4 この手続きは，まったく独立に進められたのであるが，文献 [104] のものと多少関連している．

は，B_t, $B_t^\dagger$ と $\tilde{B}_t$, $\tilde{B}_t^\dagger$ が量子 Brown 運動を表現する演算子であることを示している．

熱空間における量子 Brown 運動の微分形式表記法

$$dB_t = b_t dt, \quad dB_t^\dagger = b_t^\dagger dt, \quad d\tilde{B}_t = \tilde{b}_t dt, \quad d\tilde{B}_t^\dagger = \tilde{b}_t^\dagger dt \tag{9.2.20}$$

を導入する．これらの演算子は熱空間の真空を消去する：

$$dB_t|0,\tilde{0}) = 0,\ d\tilde{B}_t|0,\tilde{0}) = 0,\ (0,\tilde{0}|dB_t^\dagger = 0,\ (0,\tilde{0}|d\tilde{B}_t^\dagger(t) = 0. \tag{9.2.21}$$

この微分形式表記法により，

$$\Delta B_t = \int_t^{t+\Delta t} dB_{t'}, \quad \Delta B_t^\dagger = \int_{t^\dagger}^{t+\Delta t} dB_{t'}^\dagger, \tag{9.2.22}$$

$$\Delta \tilde{B}_t = \int_t^{t+\Delta t} d\tilde{B}_{t'}, \quad \Delta \tilde{B}_t^\dagger = \int_{t^\dagger}^{t+\Delta t} d\tilde{B}_{t'}^\dagger \tag{9.2.23}$$

と記すことができる．この熱空間での微分形式表記法では，差分に関する交換関係 (7.3.98) に相当する交換関係が，

$$[dB_t,\ dB_t^\dagger] = dt, \quad [d\tilde{B}_t,\ d\tilde{B}_t^\dagger] = dt \tag{9.2.24}$$

と記される．他の演算子同士の交換関係はゼロである．

$t \geq 0$ に対する確率積分

$$\hat{I}_t = \int_0^t \left\{ dB_{t'}^\dagger \hat{F}_{t'} + \hat{G}_{t'} dB_{t'} + d\tilde{B}_{t'}^\dagger \hat{J}_{t'} + \hat{K}_{t'} d\tilde{B}_{t'} + \hat{H}_{t'} dt' \right\} \tag{9.2.25}$$

が存在するとき，

$$\hat{I}_t = \int_0^t d\hat{I}_{t'}, \quad \hat{I}_{t=0} = 0 \tag{9.2.26}$$

と表記し，微分形式

$$d\hat{I}_t = dB_t^\dagger \hat{F}_t + \hat{G}_t dB_t + d\tilde{B}_t^\dagger \hat{J}_t + \hat{K}_t d\tilde{B}_t + \hat{H}_t dt \tag{9.2.27}$$

を導入する．このとき，

$$\hat{I}_t^{(i)} = \int_0^t d\hat{I}_{t'}^{(i)}, \quad \hat{I}_t^{(i)} = 0, \tag{9.2.28}$$

$$d\hat{I}_t^{(i)} = \left\{ dB_t^\dagger \hat{F}_t^{(i)} + \hat{G}_t^{(i)} dB_t + d\tilde{B}_t^\dagger \hat{J}_t^{(i)} + \hat{K}_t^{(i)} d\tilde{B}_t + \hat{H}_t^{(i)} dt \right\} \tag{9.2.29}$$

$(i=1,2)$ に対して，伊藤型確率積

$$d(\hat{I}_t^{(1)} \hat{I}_t^{(2)}) = d\hat{I}_t^{(1)} \hat{I}_t^{(2)} + \hat{I}_t^{(1)} d\hat{I}_t^{(2)} + d\hat{I}_t^{(1)} d\hat{I}_t^{(2)} \tag{9.2.30}$$

を得る．導出は，(7.3.108) とまったく同様に行われる．

9.2.2 熱真空と弱い関係

Bogoliubov 変換

$$dC_t^\mu = \mathcal{B}_T^{\mu\nu} dB_t^\nu, \quad d\bar{C}_t^\mu = d\bar{B}_t^\nu \left(\mathcal{B}_T^{-1}\right)^{\nu\mu}, \tag{9.2.31}$$

$$\mathcal{B}_T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+\bar{n}, & -\bar{n} \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\omega/T} - 1} \tag{9.2.32}$$

により新しい演算子 dC_t, $dC_t^\dagger$ とそれらのチルダ共役 $d\tilde{C}_t$, $d\tilde{C}_t^\dagger$ を導入しよう．ただし，熱的 2 重項 dB_t^μ と dC_t^μ：

$$dB_t^{\mu=1} = dB_t, \quad dB_t^{\mu=2} = d\tilde{B}_t^\dagger, \tag{9.2.33}$$

$$d\bar{B}_t^{\mu=1} = dB_t^\dagger, \quad d\bar{B}_t^{\mu=2} = -d\tilde{B}_t, \tag{9.2.34}$$

$$dC_t^{\mu=1} = dC_t, \quad dC_t^{\mu=2} = d\tilde{C}_t^\dagger, \tag{9.2.35}$$

$$d\bar{C}_t^{\mu=1} = dC_t^\dagger, \quad d\bar{C}_t^{\mu=2} = -d\tilde{C}_t \tag{9.2.36}$$

を導入した．新しい演算子 dC_t, $d\tilde{C}_t$ および $dC_t^\dagger$, $d\tilde{C}_t^\dagger$ は，それぞれ，新しい真空 $|\rangle$ および $\langle|$ を消去する：

$$dC_t|\rangle = 0, \quad d\tilde{C}_t|\rangle = 0, \quad \langle|dC_t^\dagger = 0, \quad \langle|d\tilde{C}_t^\dagger = 0. \tag{9.2.37}$$

この新しい真空は，$\langle|\rangle = 1$ と規格化されており，熱真空とよばれる．(9.2.37) より，熱真空 $|\rangle$, $\langle|$ に対する量子 Brown 運動の熱状態条件

$$(1+\bar{n})dB_t|\rangle = \bar{n}d\tilde{B}_t^\dagger|\rangle, \quad \langle|dB_t = \langle|d\tilde{B}_t^\dagger \tag{9.2.38}$$

が得られる．熱的 2 重項を用いると，交換関係 (9.2.24) は，

$$[dB_t^\mu,\ d\bar{B}_t^\nu] = dt\ \delta^{\mu\nu}, \quad [dC_t^\mu,\ d\bar{C}_t^\nu] = dt\ \delta^{\mu\nu} \tag{9.2.39}$$

とかける．

量子 Brown 運動の熱真空での 1 次モーメントと 2 次モーメントは，

$$\langle|dB_t|\rangle = 0, \quad \langle|dB_t^\dagger|\rangle = 0, \quad \langle|d\tilde{B}_t|\rangle = 0, \quad \langle|d\tilde{B}_t^\dagger|\rangle = 0, \tag{9.2.40}$$

$$\langle|dB_t dB_t^\dagger|\rangle = (1+\bar{n})dt, \quad \langle|dB_t^\dagger dB_t|\rangle = \bar{n}dt, \tag{9.2.41}$$

$$\langle|d\tilde{B}_t^\dagger dB_t^\dagger|\rangle = (1+\bar{n})dt, \quad \langle|d\tilde{B}_t dB_t|\rangle = \bar{n}dt \tag{9.2.42}$$

およびそのチルダ共役（他の 2 次モーメントはゼロ）となる．これらは，Bogoliubov 変換

$$dB_t = dC_t + \bar{n}d\tilde{C}_t, \quad dB_t^\dagger = (1+\bar{n})dC_t^\dagger + d\tilde{C} \tag{9.2.43}$$

とそのチルダ共役を用いて，たとえば，

$$\langle|dB_t dB_t^\dagger|\rangle = (1+\bar{n})\langle|dC_t dC_t^\dagger|\rangle = (1+\bar{n})dt, \tag{9.2.44}$$

$$\langle|dB_t^\dagger dB_t|\rangle = \bar{n}\langle|d\tilde{C}_t d\tilde{C}_t^\dagger|\rangle = \bar{n}dt \tag{9.2.45}$$

やその複素共役

$$\left(\langle|dB_t dB_t^\dagger|\rangle\right)^* = (\langle|)^\sim\, d\tilde{B}_t d\tilde{B}_t^\dagger\, (|\rangle)^\sim = \langle|d\tilde{B}_t d\tilde{B}_t^\dagger|\rangle, \tag{9.2.46}$$

$$\left(\langle|dB_t^\dagger dB_t|\rangle\right)^* = (\langle|)^\sim\, d\tilde{B}_t^\dagger d\tilde{B}_t\, (|\rangle)^\sim = \langle|d\tilde{B}_t^\dagger d\tilde{B}_t|\rangle, \tag{9.2.47}$$

あるいは,

$$\langle|d\tilde{B}_t^\dagger dB_t^\dagger|\rangle = \langle|dB_t dB_t^\dagger|\rangle, \quad \langle|d\tilde{B}_t dB_t|\rangle = \langle|dB_t^\dagger dB_t|\rangle \tag{9.2.48}$$

などを用いて導き出すことができる．ただし,

$$|\rangle^\sim = |\rangle, \quad \langle|^\sim = \langle|, \tag{9.2.49}$$

や熱状態条件 (9.2.38) を用いた．

微分形式の量子 Brown 運動の 2 次モーメント (9.2.41), (9.2.42) などを，真空期待値 $\langle|\cdots|\rangle$ をとることを念頭において，演算子に関する弱い関係

$$dB_t dB_t^\dagger \overset{w}{=} d\tilde{B}_t d\tilde{B}_t^\dagger \overset{w}{=} (1+\bar{n})dt,\ dB_t^\dagger dB_t \overset{w}{=} d\tilde{B}_t^\dagger d\tilde{B}_t \overset{w}{=} \bar{n}dt, \tag{9.2.50}$$

$$d\tilde{B}_t^\dagger dB_t^\dagger \overset{w}{=} dB_t^\dagger d\tilde{B}_t^\dagger \overset{w}{=} (1+\bar{n})dt,\ d\tilde{B}_t dB_t \overset{w}{=} dB_t d\tilde{B}_t \overset{w}{=} \bar{n}dt \tag{9.2.51}$$

と記すことにする．他の演算子の積の組み合わせはゼロである．弱い関係として (9.2.30) を書き下すと,

$$\begin{aligned} d(\hat{I}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)}) \overset{w}{=}\ & dB_t^\dagger \left(\hat{F}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)} + \hat{I}_t^{(1)}\hat{F}_t^{(2)}\right) + \left(\hat{G}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)} + \hat{I}_t^{(1)}\hat{G}_t^{(2)}\right) dB_t \\ & + d\tilde{B}_t^\dagger \left(\hat{J}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)} + \hat{I}_t^{(1)}\hat{J}_t^{(2)}\right) + \left(\hat{K}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)} + \hat{I}_t^{(1)}\hat{K}_t^{(2)}\right) d\tilde{B}_t \\ & + \Big[\hat{H}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)} + \hat{I}_t^{(1)}\hat{H}_t^{(2)} \\ & + (1+\bar{n})\left(\hat{F}_t^{(1)}\hat{J}_t^{(2)} + \hat{G}_t^{(1)}\hat{F}_t^{(2)} + \hat{J}_t^{(1)}\hat{F}_t^{(2)} + \hat{K}_t^{(1)}\hat{J}_t^{(2)}\right) \\ & + \bar{n}\left(\hat{F}_t^{(1)}\hat{G}_t^{(2)} + \hat{G}_t^{(1)}\hat{K}_t^{(2)} + \hat{J}_t^{(1)}\hat{K}_t^{(2)} + \hat{K}_t^{(1)}\hat{G}_t^{(2)}\right)\Big] dt \end{aligned} \tag{9.2.52}$$

が得られる．導出に当たって，弱い関係 (9.2.50), (9.2.51) を用いた．

9.3 量子確率微分方程式の体系

9.3.1 量子確率 Liouville 方程式（伊藤型）

伊藤型の量子確率 Liouville 方程式

$$d|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt\ |0_{\mathrm{f}}(t)\rangle \tag{9.3.53}$$

から議論を始めよう（確率積については，付録 A.7 節参照）.

$$|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle = \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)|0\rangle \tag{9.3.54}$$

により定義した演算子 $\hat{V}_{\mathrm{f}}(t)$ は，初期条件 $\hat{V}_{\mathrm{f}}(0)=1$ の下に，微分方程式

$$d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t) = -i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \tag{9.3.55}$$

を満たす．確率的ハット・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt$ は，チルディアン演算子で，

$$(i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt)^{\sim} = i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt \tag{9.3.56}$$

を満たしている．この性質のお蔭で，ある時刻（たとえば，$t=0$）にチルダ不変性，$|0_{\mathrm{f}}(t=0)\rangle^{\sim} = |0_{\mathrm{f}}(t=0)\rangle$，をケット熱真空に課すと，ケット熱真空のチルダ不変性は保存される：

$$|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle^{\sim} = |0_{\mathrm{f}}(t)\rangle \quad (t>0). \tag{9.3.57}$$

確率積分の微分形式 (9.2.27) によると，確率的ハット・ハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt = \hat{H}dt + :d\hat{M}_t: \tag{9.3.58}$$

の形で与えられるべきである．ただし，$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{S}} + i\hat{\Pi}, \tag{9.3.59}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = H_{\mathrm{S}} - \tilde{H}_{\mathrm{S}}, \tag{9.3.60}$$

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{\mathrm{R}} + \hat{\Pi}_{\mathrm{D}} \tag{9.3.61}$$

である．$\hat{\Pi}_{\mathrm{R}}$ と $\hat{\Pi}_{\mathrm{D}}$ は，それぞれ，緩和演算子 $\hat{\Pi}$ の緩和と散逸を司る部分である．マルチンゲール $d\hat{M}_t$ は，量子 Brown 運動 dB_t，$dB_t^\dagger$，およびそのチルダ共役を含む項で，

$$\langle| : d\hat{M}_t : |\rangle = 0 \tag{9.3.62}$$

を満たしている．ただし，$\langle|$ と $|\rangle$ は，チルダ不変性 (9.2.49) を満たす量子 Brown 運動の熱真空である．量子 Brown 運動の演算子は，弱い関係 (9.2.50), (9.2.51) を満たしている．$: d\hat{M}_t :$ にある記号 $: :$ は，注目系と非注目系の生成・消滅演算子に関して，双方あわせて正規順をとることを意味する（具体例は，9.4 節 (9.4.145) 参照)．非注目系とは，マルチンゲール $d\hat{M}_t$ に含まれる量子 Brown 運動が記述する系のことである*5.

以下では，注目系と非注目系は，時刻 $t=0$ に接続されるものと仮定して議論を進める．

9.3.2 量子 Langevin 方程式（伊藤型）

注目系の Heisenberg 演算子 $A(t)$ は，

$$A(t) = \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ A\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \tag{9.3.63}$$

で定義される．ただし，$\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)$ は，

$$d\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t) = \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}^{-}dt, \tag{9.3.64}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}^{-}dt = \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt + i : d\hat{M}_t : : d\hat{M}_t : \tag{9.3.65}$$

*5 ここの定式化では，量子 Brown 運動 dB_t，$dB_t^\dagger$ およびそのチルダ共役は，Schrödinger 表示での注目系演算子 $\hat{A}$ と可換であることが仮定されている．すなわち，$t \geq 0$ に対して，$[\hat{A},\ dB_t] = [\hat{A},\ dB_t^\dagger] = [\hat{A},\ d\tilde{B}_t] = [\hat{A},\ d\tilde{B}_t^\dagger] = 0$ が成立する．

を満たす．

これは，以下のようにして証明される．

$$d\left[\hat{V}_{\rm f}(t)\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)\right]=d\hat{V}_{\rm f}(t)\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)+\hat{V}_{\rm f}(t)d\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)+d\hat{V}_{\rm f}(t)d\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)$$
$$=0 \tag{9.3.66}$$

より，

$$d\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)=-\left[\hat{V}_{\rm f}(t)+d\hat{V}_{\rm f}(t)\right]^{-1}d\hat{V}_{\rm f}(t)\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t) \tag{9.3.67}$$

を得る．$\left[\hat{V}_{\rm f}(t)+d\hat{V}_{\rm f}(t)\right]^{-1}$ を，$d\hat{V}_{\rm f}(t)$ の 1 次のオーダーまでの精度で評価すると，

$$\left[\hat{V}_{\rm f}(t)+d\hat{V}_{\rm f}(t)\right]^{-1}\approx\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)\left[1-d\hat{V}_{\rm f}(t)\right]\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t) \tag{9.3.68}$$

となる．これを (9.3.67) に代入し，(9.3.55) より得られる

$$d\hat{V}_{\rm f}(t)\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)=-i\hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt \tag{9.3.69}$$

を用いると，

$$d\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)=\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)\ i\left[\hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt+i\hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt\ \hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt\right] \tag{9.3.70}$$

が得られる．$\mathcal{O}(dt)$ までのオーダーでは

$$\hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt\ \hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt=:d\hat{M}_t::d\hat{M}_t: \tag{9.3.71}$$

であることより，(9.3.64) が導き出せる*6．

NETFD の体系では，伊藤算法での $A(t)$ に対する確率 Heisenberg 方程式は，量子 Langevin 方程式

*6 $d[\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)\hat{V}_{\rm f}(t)]=0$ を評価しても，同様に確かめられる．

$$dA(t) = i[\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f}}(t)dt,\ A(t)] - d'\hat{M}(t)\ [d'\hat{M}(t),\ A(t)] \tag{9.3.72}$$

を与える．ただし，

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f}}(t)dt = \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t), \tag{9.3.73}$$

$$d'\hat{M}(t) = \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ d\hat{M}_t\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \tag{9.3.74}$$

である．$A(t)$ が注目系の任意の演算子であるので，(9.3.72) は量子系に拡張された伊藤公式である．なお，ここでは，伊藤確率積の記号 "·" は省略している．伊藤公式は，

$$\begin{aligned} dA(t) = d\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ A\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) + \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ A\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \\ + d\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ A\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \end{aligned} \tag{9.3.75}$$

に (9.3.55) と (9.3.64) を代入し，$\mathcal{O}(dt)$ のオーダーまで評価すると導き出せる．

(9.3.72) の左側からブラ真空 $\langle\!\langle 1| = \langle| \otimes \langle 1|$ を作用させると，ブラ・ベクトル $\langle\!\langle 1|A(t)$ に対する Langevin 方程式

$$\begin{aligned} d\langle\!\langle 1|A(t) = i\langle\!\langle 1|[H_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]dt \\ + \langle\!\langle 1|A(t)\hat{\Pi}(t)dt - i\langle\!\langle 1|A(t)\ d'\hat{M}(t) \end{aligned} \tag{9.3.76}$$

が得られる．導出に当たって，性質

$$\langle 1|\tilde{A}^{\dagger}(t) = \langle 1|A(t), \quad \langle|d'\tilde{B}^{\dagger}(t) = \langle|d'B(t), \quad \langle\!\langle 1|d'\hat{M}(t) = 0 \tag{9.3.77}$$

を用いた．

9.3.3 量子マスター方程式

確率 Liouville 方程式 (9.3.53) に非注目系のブラ真空 $\langle|$ を施すことにより乱雑平均をとると，量子マスター方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle, \tag{9.3.78}$$

$$\hat{H}dt = \langle|\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt|\rangle, \tag{9.3.79}$$

$$|0(t)\rangle = \langle|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle \tag{9.3.80}$$

を得ることができる．ただし，$\hat{H}$ は (9.3.59) のハット・ハミルトニアンである．

9.3.4 Stratonovich 型確率微分方程式

伊藤確率算法と Stratonovich 確率算法の間の関係式を利用すると，伊藤型確率 Liouville 方程式 (9.3.53) と伊藤型 Langevin 方程式 (9.3.72) のそれぞれを Stratonovich 型のものに書き直すことができる．すなわち，

$$d|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle = -i\hat{H}_{\mathrm{f},t}dt \circ |0_{\mathrm{f}}(t)\rangle, \tag{9.3.81}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{f},t}dt = \hat{H}_{\mathrm{S}}dt + i\left(\hat{\Pi}dt + \frac{1}{2}d\hat{M}_t d\hat{M}_t\right) + :d\hat{M}_t:, \tag{9.3.82}$$

および，

$$dA(t) = i[\hat{H}_{\mathrm{f}}(t)dt \,\overset{\circ}{,}\, A(t)], \tag{9.3.83}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{f}}(t)dt = \hat{H}_{\mathrm{S}}(t)dt + i\left(\hat{\Pi}(t)dt + \frac{1}{2}d'\hat{M}(t)d'\hat{M}(t)\right) + :d'\hat{M}(t): \tag{9.3.84}$$

である．

(9.3.81) は，以下のようにして導き出せる．(9.3.53) の伊藤積を Stratonovich 積に書き換え，移項すると，

$$\left(1 - i\frac{1}{2}\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt\right)d|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt \circ d|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle \tag{9.3.85}$$

を得る．この両辺に $(1 - i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt/2)^{-1}$ を作用させ，$\mathcal{O}(dt)$ までのオーダーを残すことを念頭において評価すると，

$$
\begin{aligned}
d|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle &= -i\left[\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt + i\frac{1}{2}\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt\ \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt\right]\circ|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle \\
&= -i\left[\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt + i\frac{1}{2}d\hat{M}_t d\hat{M}_t\right]\circ|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle
\end{aligned} \tag{9.3.86}
$$

となり，これに (9.3.58) を代入すれば (9.3.81) を得る．

(9.3.83) を確かめるには以下のようにすればよい．まず，

$$
[d'\hat{M}(t),\ A(t)] = [d'\hat{M}(t) \,\overset{\circ}{,}\, A(t)] - \frac{1}{2}[d'\hat{M}(t),\ dA(t)] \tag{9.3.87}
$$

の右辺第 2 項の $dA(t)$ に伊藤型量子 Langevin 方程式 (9.3.72) を代入し，$\mathcal{O}(dt)$ のオーダーまで残す評価をすると，

$$
[d'\hat{M}(t),\ A(t)] = [d'\hat{M}(t) \,\overset{\circ}{,}\, A(t)] - \frac{1}{2}[d'\hat{M}(t),\ [d'\hat{M}(t),\ A(t)]] \tag{9.3.88}
$$

となることを押さえておく．さて，(9.3.72) にハット・ハミルトニアンの具体的表式 (9.3.58) を代入すると

$$
\begin{aligned}
dA(t) = i[\hat{H}(t)dt,\ A(t)] + i[d'\hat{M}(t),\ A(t)] \\
- d'\hat{M}(t)\ [d'\hat{M}(t),\ A(t)]
\end{aligned} \tag{9.3.89}
$$

を得る．確率積のタイプが問題となるこの式の右辺第 2 項に (9.3.88) を用いると，

$$
\begin{aligned}
dA(t) &= i[\hat{H}(t)dt,\ A(t)] + i[d'\hat{M}(t) \,\overset{\circ}{,}\, A(t)] - \frac{1}{2}\{d'\hat{M}(t),\ [d'\hat{M}(t),\ A(t)]\} \\
&= i[\hat{H}(t)dt,\ A(t)] + i[d'\hat{M}(t) \,\overset{\circ}{,}\, A(t)] - \frac{1}{2}[d'\hat{M}(t)d'\hat{M}(t),\ A(t)]\}
\end{aligned} \tag{9.3.90}
$$

となり，(9.3.83) が導き出せる．

9.3.5 揺動と散逸の関係

マルチンゲールの積 $d\hat{M}_t d\hat{M}_t$ に対する第 2 種揺動散逸定理は，以下の基準によって決められる．それは，(9.3.82) で与えられる $\hat{H}_{\mathrm{f},t}dt$ 中の

$$\hat{\Pi}dt + \frac{1}{2}d\hat{M}_t d\hat{M}_t \tag{9.3.91}$$

項は散逸項 $\hat{\Pi}_{\mathrm{D}}$ を含んではならないというものである．これによると，

$$d\hat{M}_t d\hat{M}_t \overset{w}{=} -2\hat{\Pi}_{\mathrm{D}}dt \tag{9.3.92}$$

が得られる．

この基準の出所は，物理の世界に Langevin 方程式が導入された歴史的な道筋，すなわち，力学方程式に緩和項と乱雑力を導入する手続きが Stratonovich 算法で行われたというところにある．Stratonovich 型の確率微分方程式には，そのため，散逸項の入る余地がないのである．この基準を量子系の確率微分方程式の体系にも採用することにしよう．一般化された第 2 種揺動散逸定理ともよばれるべき演算子間の関係式 (9.3.92) は，弱い関係と理解されるべきものである．

9.3.6 量子 Brown 運動の Heisenberg 演算子

量子 Brown 運動の Heisenberg 演算子 $B^{\#}(t)$ は，

$$B^{\#}(t) = \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ B_t^{\#}\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \tag{9.3.93}$$

で定義される．ただし，記号 $\#$ は，「無印」，「ダガー」，「チルダ」のいずれかを意味するものとする．その時間微分（差分）

$$dB^{\#}(t) = B^{\#}(t+dt) - B^{\#}(t) \tag{9.3.94}$$

を求めてみよう．

伊藤算法での微分を実行すると，

$$\begin{aligned} dB^{\#}(t) &= d\left(\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ B_t^{\#}\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\right) \\ &= \left(d\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\right) B_t^{\#}\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) + \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ d\left(B_t^{\#}\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\right) \\ &\quad + \left(d\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\right) d\left(B_t^{\#}\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d' B_t^{\#} + \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t) \Big\{ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ B_{t+dt}^{\#} + B_{t+dt}^{\#}\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\ \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t) \\
&\quad + \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ B_{t+dt}^{\#}\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\ \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t) \Big\} \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \\
&= d' B_t^{\#} + \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t) \Big\{ i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}^{-} dt\ B_{t+dt}^{\#} - B_{t+dt}^{\#}\ i\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t} dt \\
&\quad + \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}^{-} dt\ B_{t+dt}^{\#}\ \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t} dt \Big\} \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)
\end{aligned}
\tag{9.3.95}
$$

となる．ただし，

$$
B_{t+dt}^{\#} = B_t^{\#} + dB_t^{\#} \tag{9.3.96}
$$

である．第 3 等号では，

$$
\begin{aligned}
d\left(B_t^{\#}\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \right) &= dB_t^{\#}\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t) + B_t^{\#}\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t) + dB_t^{\#}\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t) \\
&= \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)\ dB_t^{\#} + B_{t+dt}^{\#}\ d\hat{V}_{\mathrm{f}}(t)
\end{aligned}
\tag{9.3.97}
$$

を代入した．ここで，伊藤確率積で成り立つ可換性

$$
[dB_t^{\#},\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t)] = 0 \tag{9.3.98}
$$

を用いている．第 4 等号では，(9.3.55) と (9.3.64) を利用した．なお，ここでは，伊藤確率積の記号 “$\cdot$” は省略している．

(9.3.95) の右辺に，(9.3.58) と (9.3.65) を代入し，$dB_t \sim \mathcal{O}(\sqrt{dt})$， $: d\hat{M}_t :\sim \mathcal{O}(\sqrt{dt})$，$\hat{H} dt \sim \mathcal{O}(dt)$ を考慮して，$\mathcal{O}(dt)$ のオーダーまで残すと，結局，

$$
dB^{\#}(t) = dB_t^{\#} + i[: d' \hat{M}(t) :,\ dB_t^{\#}] \tag{9.3.99}
$$

が得られる．導出に当たって，

$$
[\hat{H} dt,\ B_{t+dt}^{\#}] = 0, \qquad [: d\hat{M}_t :,\ B_t^{\#}] = 0, \tag{9.3.100}
$$

および

$$[:d\hat{M}_t:,\ B^{\#}_{t+dt}] = [:d\hat{M}_t:,\ dB^{\#}_t] \sim \mathcal{O}(dt) \tag{9.3.101}$$

を用いた．

(9.3.99) は，Heisenberg 演算子 $dB^{\#}(t)$ と Schrödinger 表示の演算子 $dB^{\#}_t$ との関係を与えている．これは，注目系への入射場 $dB^{\#}_t$ が，系との相互作用を経験した後，出射場 $dB^{\#}(t)$ として系外へ射出される際の場の間の関係式と解釈することができる．したがって，(9.3.99) は，文献 [114, 115] で議論されている入力・出力理論（input-output theory）と密接な関係にある．

9.4 ボソン系の量子確率微分方程式

この節では，温度 T の熱浴（環境）に浸っている調和振動子の半自由粒子モデルを前節の理論体系で扱ってみよう．

9.4.1 マルチンゲール演算子の導出

この系の時間発展を記述する伊藤型確率 Liouville 方程式 (9.3.53) の確率的ハット・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}$(9.3.58) を求める．

半自由粒子に対する $\hat{H}$ は，(8.3.41) で与えられる．ただし，注目系の確率演算子 a，$a^\dagger$ およびそのチルダ共役は，正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a},\ \tilde{a}^\dagger] = 1 \tag{9.4.102}$$

を満たす．チルダ演算子と非チルダ演算子は，互いに，熱状態条件

$$\langle 1|a^\dagger = \langle 1|\tilde{a} \tag{9.4.103}$$

で関連している．$\langle 1|$ は注目系のブラ真空である．

ここでは確率的半自由粒子の系に興味があるので，量子 Brown 運動演算子を含むマルチンゲール $d\hat{M}_t$ が，a，$a^\dagger$，$dB_t, dB^\dagger_t$ とそのチルダ共役に関して双線形であり，しかも，大局的位相変換 $a \to a\mathrm{e}^{i\theta}$，$dB_t \to dB_t\ \mathrm{e}^{i\theta}$ に関して不変である場

合に限定して議論を進める*7.

注目系だけで確率が保存するマルチンゲール

はじめに，古典確率微分方程式の体系（付録 A.6 節参照）と同様に，量子系においても注目系だけで確率の保存を満たすマルチンゲールが可能かどうか調べてみよう.

可能なマルチンゲールの一般形は，

$$d\hat{M}_t = i\Big\{h_1 a^\dagger dB_t + h_2 a^\dagger d\tilde{B}_t^\dagger + h_3 \tilde{a}\ dB_t + h_4 \tilde{a}\ d\tilde{B}_t^\dagger + h_5 \tilde{a}^\dagger d\tilde{B}_t + h_6 \tilde{a}^\dagger dB_t^\dagger + h_7 a\ d\tilde{B}_t + h_8 a\ dB_t^\dagger\Big\} \tag{9.4.104}$$

で与えられる．ただし，h は時間に依存しない複素数であるとした．チルディアン（8.2 節の **B1**）の性質，(8.2.18)

$$\left(i\ d\hat{M}\right)^\sim = i\ d\hat{M} \tag{9.4.105}$$

を課すと，

$$h_1^* = h_5, \quad h_2^* = h_6, \quad h_3^* = h_7, \quad h_4^* = h_8 \tag{9.4.106}$$

を得る．注目系のみで確率が保存する性質をもつための条件

$$\langle 1|d\hat{M} = 0 \tag{9.4.107}$$

より，関係式

$$h_1 + h_3 = 0, \quad h_2 + h_4 = 0 \tag{9.4.108}$$

が得られる．(9.4.105) と (9.4.107) を用いると，(9.4.103) は

*7　これは散逸的線形結合をしている系を与える.

$$d\hat{M} = i\left(\gamma^{♀} dW_t + \text{t.c.}\right) \tag{9.4.109}$$

となる．ただし，

$$\gamma^{♀} = a^\dagger - \tilde{a}, \tag{9.4.110}$$

$$dW_t = h_1 dB_t + h_2 \tilde{B}_t^\dagger \tag{9.4.111}$$

とおいた*8．t.c. はチルダ共役の意味である．

モーメント

$$\left\langle dW_t d\tilde{W}_t \right\rangle = (h_1 + h_2)\left(h_1^* \left\langle dB_t^\dagger dB_t \right\rangle + h_2^* \left\langle dB_t dB_t^\dagger \right\rangle\right), \tag{9.4.112}$$

$$\left\langle d\tilde{W}_t dW_t \right\rangle = (h_1^* + h_2^*)\left(h_1 \left\langle dB_t^\dagger dB_t \right\rangle + h_2 \left\langle dB_t dB_t^\dagger \right\rangle\right) \tag{9.4.113}$$

を考えよう．ただし，dB_t や $dB_t^\dagger$ に対して，(9.2.38) の第 2 式を用いた．また，$\langle\cdots\rangle = \langle|\cdots|\rangle$ の記法を用いている．さらに，8.2 節の **T2** にある可換性の性質 $dW_t d\tilde{W}_t = d\tilde{W}_t dW_t$ により，(9.4.112) と (9.4.113) を等置すると，関係式

$$(h_1 + h_2)h_1^* = (h_1^* + h_2^*)h_1, \quad (h_1 + h_2)h_2^* = (h_1^* + h_2^*)h_2 \tag{9.4.114}$$

が得られる．これは，

$$h_1^* h_2 = h_1 h_2^* = (h_1^* h_2)^* \tag{9.4.115}$$

を与えるので，

$$h_1 = |h_1|\mathrm{e}^{i\theta}, \quad h_2 = |h_2|\mathrm{e}^{i\theta} \tag{9.4.116}$$

とおくことができる．これより，ベクトル $\langle|dW_t$ は，

*8 以下この章では，確率過程を記述する演算子として文字 W_t を用いるが，これは第 2 章，第 3 章の密度演算子 $W(t)$ とは無関係の量である．

$$\langle|dW_t = h\mathrm{e}^{i\theta}\langle|dB_t, \quad h = |h_1| + |h_2| \tag{9.4.117}$$

となることがわかる.

以上より,

$$dW_t = h\left(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^\dagger\right) \tag{9.4.118}$$

を得る. ただし, $\mu = |h_1|/h$, $\nu = |h_2|/h$ とした. したがって,

$$\mu + \nu = 1 \tag{9.4.119}$$

を満たす.

位相因子 $\mathrm{e}^{i\theta}$ を dB_t, $d\tilde{B}_t^\dagger$ にくり込むと, 注目系だけで確率の保存を保証する. すなわち,

$$\langle 1|d\hat{M}_t^{(-)} = 0 \tag{9.4.120}$$

を満たすマルチンゲール $d\hat{M}_t^{(-)}$ が存在し,

$$d\hat{M}_t^{(-)} = i\left(\gamma^{\text{♀}} dW_t + \tilde{\gamma}^{\text{♀}} d\tilde{W}_t\right) \tag{9.4.121}$$

で与えられることがわかった. ただし, $\gamma^{\text{♀}}$ と dW_t は, それぞれ, (9.4.110) と (9.4.118) である. なお, 生成演算子 $\gamma^{\text{♀}}$ は, ケット真空 $\langle 1|$ を消去する:

$$\langle 1|\gamma^{\text{♀}} = 0. \tag{9.4.122}$$

微視的導出とつながるマルチンゲール

量子 Langevin 方程式の微視的な導出とつながるマルチンゲール $d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})}$ は, エルミート性

$$d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})\dagger} = d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})} \tag{9.4.123}$$

を満たし，かつ，

$$d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})} = dM_t^{(\mathrm{h})} - d\tilde{M}_t^{(\mathrm{h})} \tag{9.4.124}$$

の形で与えられるはずである．大域的位相変換不変性を課すと，$dM_t^{(\mathrm{h})}$ の半自由粒子に対する一般系は，

$$dM_t^{(\mathrm{h})} = ih\left(a^\dagger dB_t - a dB_t^\dagger\right) \tag{9.4.125}$$

とおける．これを (9.4.124) へ代入すると，

$$d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})} = d\hat{M}_t^{(-)} + d\hat{M}_t^{(+)} \tag{9.4.126}$$

となる．ただし，$d\hat{M}_t^{(-)}$ は (9.4.121)，$d\hat{M}_t^{(+)}$ は

$$d\hat{M}_t^{(+)} = -i\left(\gamma_\nu dW_t^{\female} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{\female}\right) \tag{9.4.127}$$

で与えられる．ここで新しい演算子

$$\gamma_\nu = \mu a + \nu \tilde{a}^\dagger, \quad \mu + \nu = 1 \tag{9.4.128}$$

$$dW_t^{\female} = h\left(dB_t^\dagger - d\tilde{B}_t\right) \tag{9.4.129}$$

を導入して用いた．これらは，正準交換関係

$$[\gamma_\nu,\ \gamma^{\female}] = 1, \quad [dW_t,\ dW_t^{\female}] = 1 \tag{9.4.130}$$

を満たす．

注目系のブラ真空 $\langle 1|$ を (9.4.126) に作用させると，

$$\langle 1|d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})} = \langle 1|d\hat{M}_t^{(+)} = -i\langle 1|\left[a dW_t^{\natural} + a^\dagger d\tilde{W}_t^{\natural}\right] \tag{9.4.131}$$

を得る．これは，注目系のみでの確率の保存を保証していないことを意味する．ブラ真空 $\langle|$ を (9.4.131) にさらに作用させると

$$\langle\!\langle 1|d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})} = 0 \tag{9.4.132}$$

を満たすことがわかる．つまり，確率の保存は，注目系と相手系をあわせた全系では満たされているのである．ただし，

$$\langle\!\langle 1| = \langle| \otimes \langle 1| \tag{9.4.133}$$

を導入した．

係数 h の決定

(8.3.90) で導入された $\hat{\Pi}$ を構成している $\hat{\Pi}_{\mathrm{R}}$ と $\hat{\Pi}_{\mathrm{D}}$ は，それぞれ，γ_ν, $\gamma^{\natural}$ およびこれらのチルダ共役で書き下すと，

$$\hat{\Pi}_{\mathrm{R}} = -\kappa\left(\gamma^{\natural}\gamma_\nu + \tilde{\gamma}^{\natural}\tilde{\gamma}_\nu\right), \quad \hat{\Pi}_{\mathrm{D}} = 2\kappa\left(\bar{n}+\nu\right)\gamma^{\natural}\tilde{\gamma}^{\natural} \tag{9.4.134}$$

となる．パラメータ ν（あるいは，μ）は，コヒーレント状態を利用して密度演算子を c-数空間に射影するときの生成・消滅演算子の並び方（ordering）と密接に関係している [116]．すなわち，正規順の場合は $\nu=1$，反正規順（anti-normal ordering）では $\nu=0$，Weyl（ワイル）順（Weyl ordering）の場合は $\nu=\frac{1}{2}$ である*9．

量子 Brown 運動の弱い関係 (9.2.50), (9.2.51) を用いると，

*9 4.3.1 項に現れる指標 s とここでの指標 ν は，$\nu=(1+s)/2$ で結ばれている．まとめると，密度演算子を c-数関数に写像する際，反正規順で写像をすると P 関数に，Weyl 順だと Wigner 関数に，正規順だと Q 関数となるのである．

$$dW_t\ d\tilde{W}_t = d\tilde{W}_t\ dW_t = h^2\,(\bar{n}+\nu)\,dt, \tag{9.4.135}$$

$$dW_t\ dW_t^{♀} = d\tilde{W}_t\ d\tilde{W}_t^{♀} = h^2 dt \tag{9.4.136}$$

を得る．他の組み合わせはゼロである．これらを利用すると，

$$: d\hat{M}_t^{(-)} : \ = i(\gamma^{♀} dW_t + \tilde{\gamma}^{♀} d\tilde{W}_t), \tag{9.4.137}$$

$$: d\hat{M}_t^{(+)} : \ = -i(dW_t^{♀}\gamma_\nu + d\tilde{W}_t^{♀}\tilde{\gamma}_\nu) \tag{9.4.138}$$

の積に対して，

$$: d\hat{M}_t^{(-)} :: d\hat{M}_t^{(-)} := -2h^2\,(\bar{n}+\nu)\,\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀}, \tag{9.4.139}$$

$$: d\hat{M}_t^{(-)} :: d\hat{M}_t^{(+)} := h^2\left(\gamma^{♀}\gamma_\nu + \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_\nu\right), \tag{9.4.140}$$

$$: d\hat{M}_t^{(+)} :: d\hat{M}_t^{(+)} : \ = \ : d\hat{M}_t^{(+)} :: d\hat{M}_t^{(-)} := 0 \tag{9.4.141}$$

が得られる．ここで，正規順記号 $: \ :$ は，γ_ν，$\gamma^{♀}$，dW，$dW^{♀}$ およびそのチルダ共役をあわせた演算子全体に関して正規順をとるべきことを意味する．たとえば，$: d\tilde{W}_t\gamma_\nu dW_t^{♀}\tilde{\gamma}^{♀} := d\tilde{W}_t^{♀} d\tilde{W}_t \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_\nu$ である．必要のない限り，弱い関係を表す等号 $\overset{w}{=}$ を通常の等号 $=$ で記す．

さて，注目系だけで確率が保存する場合には，古典確率微分方程式の体系と同様の第 2 種揺動散逸定理：

$$: d\hat{M}_t^{(-)} :: d\hat{M}_t^{(-)} : \ = -2\hat{\Pi}_{\mathrm{D}} dt \tag{9.4.142}$$

が成立していることを要請しよう．拡散にかかわる $\hat{\Pi}_{\mathrm{D}}$ のみが関与しているところが，古典系の場合に対応しているのである．(9.4.142) に，(9.4.139) と (9.4.134) を代入すると，

$$h = \sqrt{\kappa} \tag{9.4.143}$$

を得る．これより，微視的な導出とつながるマルチンゲール $: d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})} :$ に対する第 2 種揺動散逸定理が，

$$:d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})}::d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})}: \; = -2\hat{\Pi}dt \tag{9.4.144}$$

となることが導かれる．ただし，$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{\mathrm{R}} + \hat{\Pi}_{\mathrm{D}}$ である．

9.4.2 マルチンゲール

前項の考察をふまえて，以下この節（9.4 節）では，マルチンゲール

$$:d\hat{M}_t: \; = \; :d\hat{M}_t^{(-)}: \; + \lambda :d\hat{M}_t^{(+)}: \tag{9.4.145}$$

を扱うことにする．ただし，$:d\hat{M}_t^{(-)}:$，　$:d\hat{M}_t^{(+)}:$ は，それぞれ，(9.4.137)，(9.4.138) である．乱雑力の生成・消滅演算子 $dW_t^{\female}$ と dW_t は，(9.4.143) を用いて，それぞれ，

$$dW_t^{\female} = \sqrt{2\kappa}\left(dB_t^{\dagger} - d\tilde{B}_t\right), \tag{9.4.146}$$

$$dW_t = \sqrt{2\kappa}\left(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^{\dagger}\right) \tag{9.4.147}$$

で定義し直す．前者は，非注目系のブラ真空 $\langle|$ を消去する：

$$\langle| dW_t^{\female} = 0, \quad \langle| d\tilde{W}_t^{\female} = 0. \tag{9.4.148}$$

実数値パラメータ $\lambda\,(0 \leq \lambda \leq 1)$ は，「注目系だけでの確率の保存が破れる程度」を表す指標である*10．物理的に興味深い場合が少なくとも 2 つ存在する [116, 117, 118]．1 つは $\lambda = 0$ の場合で，マルチンゲールは非エルミート演算子となる：

$$d\hat{M}_t^{(-)} = i\sqrt{2\kappa}\left[\left(a^{\dagger} - \tilde{a}\right) d\tilde{B}_t^{\dagger} + \mathrm{t.c.}\right]. \tag{9.4.149}$$

もう 1 つ，$\lambda = 1$ の場合は，マルチンゲールはエルミート演算子となる：

---

*10　$\lambda = 0$ が，注目系だけで確率が保存する場合である．一方，$\lambda = 1$ は，マルチンゲールがエルミート演算子 $d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})}$，(9.4.124)，となる場合である．

$$d\hat{M}_t^{(\mathrm{h})} = i\sqrt{2\kappa}\left[\left(a^\dagger dB_t - dB_t^\dagger a\right) + \mathrm{t.c.}\right]. \tag{9.4.150}$$

先にも述べてきたが，前者，(9.4.149) は，「確率的密度分布関数は注目系の位相空間内で確率の保存を満たしている」という古典確率 Liouville 方程式の特徴を踏襲している（付録 A.6 節参照）．すなわち，

$$\langle 1|d\hat{M}_t = 0 \tag{9.4.151}$$

である．別の言い方をすると，注目系だけで，確率 Liouville 方程式は確率を保存しているのである．一方，後者は，確率的波動関数のノルムが保存するという Schrödinger 方程式の性質を踏襲している．この場合，古典系確率微分方程式のもつ構造との対応はない [116, 117, 118].

また，パラメータ λ を，マルチンゲール演算子 $:d\hat{M}_t:$ への，$:d\hat{M}_t^{(-)}:$ に対する非可換部分 $:d\hat{M}_t^{(+)}:$ の混入程度を表す指標と考えることもできる：

$$[\,:d\hat{M}_t^{(-)}:,\ :d\hat{M}_t^{(+)}:\,] = -2\hat{\Pi}_{\mathrm{R}}dt. \tag{9.4.152}$$

この交換関係を求めるに当たって，

$$dW_t\ d\tilde{W}_t \overset{w}{=} d\tilde{W}_t\ dW_t \overset{w}{=} 2\kappa\,(\bar{n}+\nu)\,dt, \tag{9.4.153}$$

$$dW_t\ dW_t^{\female} \overset{w}{=} d\tilde{W}_t\ d\tilde{W}_t^{\female} \overset{w}{=} 2\kappa dt \tag{9.4.154}$$

であることと，

$$[dW_t,\ dW_t^{\female}] = [d\tilde{W}_t,\ d\tilde{W}_t^{\female}] = 2\kappa dt, \tag{9.4.155}$$

および，他の交換関係はゼロであることを用いた．(9.4.155) は，(9.1.9) に対応している．

この系の第 2 種揺動散逸定理は，

$$:d\hat{M}_t::d\hat{M}_t: \overset{w}{=} -2(\lambda\hat{\Pi}_{\mathrm{R}} + \hat{\Pi}_{\mathrm{D}})dt \tag{9.4.156}$$

で与えられる．ただし，関係式

$$:d\hat{M}_t^{(-)}::d\hat{M}_t^{(-)}:\overset{w}{=}-2\hat{\Pi}_{\rm D}dt, \tag{9.4.157}$$

$$:d\hat{M}_t^{(-)}::d\hat{M}_t^{(+)}:\overset{w}{=}-2\hat{\Pi}_{\rm R}dt, \tag{9.4.158}$$

および，

$$:d\hat{M}_t^{(+)}::d\hat{M}_t^{(+)}:\ \overset{w}{=}:d\hat{M}_t^{(+)}::d\hat{M}_t^{(-)}:\overset{w}{=}0 \tag{9.4.159}$$

を利用した．これは，(9.4.153), (9.4.154) により導かれる．

このモデルでは，(9.3.64) の $\hat{V}_{\rm f}^{-1}(t)$ に対するハット・ハミルトニアン (9.3.65) は，

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}^{-}dt &= \hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt + i:d\hat{M}_t::d\hat{M}_t: \\ &= \hat{H}_{\rm S}dt + i((1-2\lambda)\hat{\Pi}_{\rm R}-\hat{\Pi}_{\rm D})dt + d\hat{M}_t\end{aligned} \tag{9.4.160}$$

となる．なお，$\hat{\mathcal{H}}_{{\rm f},t}dt$ は (9.3.58) で与えられている．

Stratonovich 型確率 Liouville 方程式 (9.3.81) のハット・ハミルトニアン (9.3.82) は

$$\begin{aligned}\hat{H}_{{\rm f},t}dt &= \hat{H}_{\rm S}dt + i\left(\hat{\Pi}dt + \frac{1}{2}:d\hat{M}_t::d\hat{M}_t:\right) + :d\hat{M}_t: \\ &= \hat{H}_{\rm S}dt + i(1-\lambda)\hat{\Pi}_{\rm R}dt + d\hat{M}_t\end{aligned} \tag{9.4.161}$$

で与えられ，Stratonovich 型 Langevin 方程式 (9.3.83) のハット・ハミルトニアン (9.3.84) は

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm f}(t)dt &= \hat{H}_{\rm S}(t)dt + i\left(\hat{\Pi}(t)dt + \frac{1}{2}d'\hat{M}(t)d'\hat{M}(t)\right) + :d'\hat{M}(t): \\ &= \hat{H}_{\rm S}(t)dt + i(1-\lambda)\hat{\Pi}_{\rm R}(t)dt + :d'\hat{M}(t):\end{aligned} \tag{9.4.162}$$

で与えられることがわかる．

9.4.3 量子 Brown 運動の Heisenberg 演算子

量子 Brown 運動を記述する Heisenberg 演算子の差分は，(9.3.99) より，

$$dB(t) = dB_t + \sqrt{2\kappa}\left[(1-\lambda)\,\nu\left(\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)\right) - \lambda a(t)\right] dt, \tag{9.4.163}$$

$$dB^\dagger(t) = dB_t^\dagger - \sqrt{2\kappa}\left[(1-\lambda)\,\mu\left(a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)\right) + \lambda a^\dagger(t)\right] dt, \tag{9.4.164}$$

および，これらのチルダ共役で与えられる．これは，

$$[: d'\hat{M}(t) :,\ d'B(t)] = \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\ [: d\hat{M}_t :,\ dB_t]\ \hat{V}_{\mathrm{f}}(t), \tag{9.4.165}$$

$$\begin{aligned} [: d\hat{M}_t :,\ dB_t] &= [: d\hat{M}_t^{(-)} :,\ dB_t] + \lambda[: d\hat{M}_t^{(+)} :,\ dB_t] \\ &= -i\sqrt{2\kappa}\left(\nu\tilde{\gamma}^{\female} - \lambda\gamma_\nu\right) dt \\ &= -i\sqrt{2\kappa}\left[(1-\lambda)\,\nu\left(\tilde{a}^\dagger - a\right) - \lambda a\right] dt \end{aligned} \tag{9.4.166}$$

などを利用して導出される．以上より，

$$dW(t) = dW_t - \lambda 2\kappa\gamma_\nu(t)dt, \tag{9.4.167}$$

$$dW^{\female}(t) = dW_t^{\female} - 2\kappa\gamma^{\female}(t)dt \tag{9.4.168}$$

を得る．

(9.4.167) と (9.4.168) を用いると，

$$\begin{aligned} &: d\hat{M}(t) : =: d'\hat{M}(t) : \\ &\quad = i[\gamma^{\female}(t)dW_t + \tilde{\gamma}^{\female}(t)d\tilde{W}_t] - i\lambda[dW_t^{\female}\gamma_\nu(t) + d\tilde{W}_t^{\female}\tilde{\gamma}_\nu(t)] \end{aligned} \tag{9.4.169}$$

が示せる．したがって，Heisenberg 表示でのマルチンゲール $: d\hat{M}(t) :$ も，マルチンゲール演算子の性質

$$\langle | d\hat{M}(t) | \rangle = 0 \tag{9.4.170}$$

を満たすことがわかる．

9.4.4 量子 Langevin 方程式

量子 Langevin 方程式は,

$$
\begin{aligned}
dA(t) = & \, i[\hat{H}_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]dt \\
& + \kappa\{(1-2\lambda)(\gamma^{♀}(t)[\gamma_\nu(t),\ A(t)] + \tilde{\gamma}^{♀}(t)[\tilde{\gamma}_\nu(t),\ A(t)]) \\
& \quad + [\gamma^{♀}(t),\ A(t)]\gamma_\nu(t) + [\tilde{\gamma}^{♀}(t),\ A(t)]\tilde{\gamma}_\nu(t)\}dt \\
& + 2\kappa(\bar{n}+\nu)[\tilde{\gamma}^{♀}(t),\ [\gamma^{♀}(t),\ A(t)]]dt \\
& - \{[\gamma^{♀}(t),\ A(t)]dW_t + [\tilde{\gamma}^{♀}(t),\ A(t)]d\tilde{W}_t\} \\
& \quad + \lambda\{dW_t^{♀}[\gamma_\nu(t),\ A(t)] + d\tilde{W}_t^{♀}[\tilde{\gamma}_\nu(t),\ A(t)]\}
\end{aligned}
\tag{9.4.171}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \, i[\hat{H}_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]dt \\
& + \kappa\{\gamma^{♀}(t)[\gamma_\nu(t),\ A(t)] + \tilde{\gamma}^{♀}(t)[\tilde{\gamma}_\nu(t),\ A(t)] \\
& \quad + (1-2\lambda)([\gamma^{♀}(t),\ A(t)]\gamma_\nu(t) + [\tilde{\gamma}^{♀}(t),\ A(t)]\tilde{\gamma}_\nu(t))\}dt \\
& + 2\kappa(\bar{n}+\nu)[\tilde{\gamma}^{♀}(t),\ [\gamma^{♀}(t),\ A(t)]]dt \\
& - \{[\gamma^{♀}(t),\ A(t)]dW(t) + [\tilde{\gamma}^{♀}(t),\ A(t)]d\tilde{W}(t)\} \\
& \quad + \lambda\{dW^{♀}(t)[\gamma_\nu(t),\ A(t)] + d\tilde{W}^{♀}(t)[\tilde{\gamma}_\nu(t),\ A(t)]\}
\end{aligned}
\tag{9.4.172}
$$

で与えられる．ただし,

$$
\hat{H}_{\mathrm{S}}(t) = \hat{V}_{\mathrm{f}}^{-1}(t)\hat{H}_{\mathrm{S}}\hat{V}_{\mathrm{f}}(t) = H_{\mathrm{S}}(t) - \tilde{H}_{\mathrm{S}}(t) \tag{9.4.173}
$$

である．(9.4.171) は，Langevin 方程式を Schrödinger（あるいは，相互作用）表示での量子 Brown 運動（入射場）にて書き下されている．一方，(9.4.172) では，それを Heisenberg 表示の量子 Brown 運動（出射場）で書き直している．

ブラ・ベクトル状態 $\langle\!\langle 1|A(t)$ の Langevin 方程式は,

$$
\begin{aligned}
d\langle\!\langle 1|A(t) = & \, i\langle\!\langle 1|[H_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]dt \\
& - \kappa\left\{\langle\!\langle 1|[A(t),\ a^\dagger(t)]a(t) + \langle\!\langle 1|a^\dagger(t)[a(t),\ A(t)]\right\}dt \\
& + 2\kappa\bar{n}\langle\!\langle 1|[a(t),\ [A(t),\ a^\dagger(t)]]dt \\
& + \langle\!\langle 1|[A(t),\ a^\dagger(t)]\sqrt{2\kappa}\ dB_t + \langle\!\langle 1|\sqrt{2\kappa}\ dB_t^\dagger[a(t),\ A(t)]
\end{aligned}
\tag{9.4.174}
$$

$$
\begin{aligned}
&= i\langle\!\langle 1|[H_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]dt \\
&\quad -\kappa(1-2\lambda)\left\{\langle\!\langle 1|[A(t),\ a^\dagger(t)]a(t)+\langle\!\langle 1|a^\dagger(t)[a(t),\ A(t)]\right\}dt \\
&\quad +2\kappa\bar{n}\langle\!\langle 1|[a(t),\ [A(t),\ a^\dagger(t)]]dt+\langle\!\langle 1|[A(t),\ a^\dagger(t)]\sqrt{2\kappa}\,dB(t) \\
&\quad +\langle\!\langle 1|\sqrt{2\kappa}\,dB^\dagger(t)[a(t),\ A(t)]
\end{aligned}
\tag{9.4.175}
$$

となる．Heisenberg 演算子の解 (9.4.163) と (9.4.164) を (9.4.175) の $dB(t)$ と $dB^\dagger(t)$ に代入すると，非可換性パラメータ λ を含まない量子 Langevin 方程式 (9.4.174) が得られる．(9.4.174) と (9.4.175) のこの関係は特筆に値する．

$a(t)$ と $a^\dagger(t)$ に対する Langevin 方程式は，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
da(t) &= (-i\omega-\kappa)\,a(t)dt \\
&\quad + dW_t - 2(1-\lambda)\nu\kappa\left[\tilde{a}^\dagger(t)-a(t)\right]dt-\lambda\nu d\tilde{W}_t^{\text{♀}},
\end{aligned}
\tag{9.4.176}
$$

$$
\begin{aligned}
da^\dagger(t) &= (i\omega-\kappa)\,a^\dagger(t)dt \\
&\quad + d\tilde{W}_t + 2(1-\lambda)\mu\kappa\left[a^\dagger(t)-\tilde{a}(t)\right]dt+\lambda\mu dW_t^{\text{♀}}
\end{aligned}
\tag{9.4.177}
$$

となる．これらの式に $\langle\!\langle 1| = \langle 1|\otimes\langle|$ を施すと，右辺最後の 2 項は消え，ベクトル $\langle\!\langle 1|a(t)$ と $\langle\!\langle 1|a^\dagger(t)$ に対する Langevin 方程式が得られる：

$$
d\langle\!\langle 1|a(t) = -i\omega\langle\!\langle 1|a(t)dt-\kappa\langle\!\langle 1|a(t)dt+\sqrt{2\kappa}\langle\!\langle 1|dB_t, \tag{9.4.178}
$$

$$
d\langle\!\langle 1|a^\dagger(t) = i\omega\langle\!\langle 1|a^\dagger(t)dt-\kappa\langle\!\langle 1|a^\dagger(t)dt+\sqrt{2\kappa}\langle\!\langle 1|dB_t^\dagger. \tag{9.4.179}
$$

これらが λ, μ, ν の値にはよらないことは，注目に値する．また，これらが，(9.1.6), (9.1.7) と同じ構造をもつことも注目すべきである．

なお，$\lambda=0$ とおくと，(9.4.176) と (9.4.177) は，それぞれ，

$$
da(t) = -i\omega a(t)dt-\kappa\tilde{a}^\dagger(t)dt+dW_t, \tag{9.4.180}
$$

$$
da^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t)dt-\kappa\tilde{a}(t)dt+d\tilde{W}_t \tag{9.4.181}
$$

となる．ただし，簡単のため，$\mu=\nu=\frac{1}{2}$ とおいた．一方，$\lambda=1$ とおくと，

$$da(t) = -i\omega a(t)dt - \kappa a(t)dt + \sqrt{2\kappa}dB_t, \tag{9.4.182}$$

$$da^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t)dt - \kappa a^\dagger(t)dt + \sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger \tag{9.4.183}$$

を得る．これらが，(9.1.6), (9.1.7) と同じ構造の量子 Langevin 方程式を与えることは，$\lambda = 1$ では無限小時間発展推進子がエルミートであるので，(9.1.6), (9.1.7) における設定と同一となるための必然である．

(9.4.174) の構造は，λ の値によらず，(7.5.172) の構造と一致していることがわかる．この一致をもたらす源は，S-H Langevin 方程式を導出する際に採用した第 2 処方にある．いずれにしても，この一致は，やはり，(7.5.172) が伊藤型の確率微分方程式であることを示唆している．

S-H Langevin 方程式は，オブザーバブル演算子のベクトル空間で，射影演算子を利用して導出された．任意の演算子 A と密度演算子 ρ に対する「内積」を，

$$\langle A|\rho\rangle \equiv \mathrm{Tr}\ (A\rho) \tag{9.4.184}$$

にて定義すると，オブザーバブル A の方程式は，オブザーバブル空間内のベクトル $\langle A|$ の方程式と解釈することができる．ところで，NETFD の体系は，元々，オブザーバブル・ブラ・ベクトル $\langle\!\langle 1|A$ が $\langle A|$ となるようにつくられている*11．こう考えると，上記の一致を納得することができよう*12．

9.5 スピン系の量子 Langevin 方程式

ここでは，古典確率過程の体系との整合性がよい $\lambda = 0$ にて議論を展開する．

注目系のハミルトニアンが

$$H_{\mathrm{S}} = \omega s^z \tag{9.5.185}$$

---

*11 ベクトル $|\rho\rangle$ は，NETFD における $|0_{\mathrm{f}}(t)\rangle$ や $|0(t)\rangle$ に対応している．

*12 通常，内積は $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$ で定義されるべきものである．それとは異なる「内積」を採用したのは，NETFD の議論では，$\langle A| = \langle 1|A$ などの標記を使用したいためである．これは，通常の定義に従うと，$\langle A| = \langle 1|A^\dagger$ なる対応を付けることとなり，NETFD での扱いが不便となる．

で与えられる１つの半自由スピンの緩和を扱おう．この系の確率ハット・ハミルトニアンは，$s^{\pm}$, s^{z}, $dF_t^{\pm}$, dF_t^{z} とこれらのチルダ共役に関して双線形であり，大局的位相変換 $s^- \to s^- \mathrm{e}^{i\theta}, dF_t^- \to dF_t^- \mathrm{e}^{i\theta}$ に関して不変であると仮定する．演算子 $s^{\pm}$ は，

$$s^+ = s^x + is^y, \quad s^- = s^x - is^y \tag{9.5.186}$$

で定義する．ただし，演算子 s^x, s^y, s^z は交換関係

$$[s^x,\ s^y] = is^z, \quad [s^y,\ s^z] = is^x, \quad [s^z,\ s^x] = is^y \tag{9.5.187}$$

を満たす．

量子確率過程 $dF_t^{\pm}$, dF_t^{z} は，

$$\langle dF_t^- \rangle = \langle dF_t^+ \rangle = 0, \tag{9.5.188}$$

$$\langle dF_t^- dF_{t'}^- \rangle = \langle dF_{t'}^+ dF_t^+ \rangle = 0, \tag{9.5.189}$$

$$\langle dF_t^+ dF_{t'}^- \rangle = \gamma_{01}\delta(t-t')dtdt', \tag{9.5.190}$$

$$\langle dF_t^- dF_{t'}^+ \rangle = \gamma_{10}\delta(t-t')dtdt' \tag{9.5.191}$$

および，

$$\langle dF_t^z \rangle = 0, \tag{9.5.192}$$

$$\langle dF_t^z dF_{t'}^z \rangle = \langle dF_{t'}^z dF_t^z \rangle = \zeta\ \delta(t-t')dtdt' \tag{9.5.193}$$

を満たす．ただし，dF_t^z と $dF_t^{\pm}$ の間には，相関がないものと仮定する．量子確率過程は，

$$\langle | dF_t^+ = \langle | d\tilde{F}_t^-, \quad \langle | dF_t^z = \langle | d\tilde{F}_t^z \tag{9.5.194}$$

を満たす．ただし，dF_t^z はエルミート演算子であると仮定した．

このモデルに対する伊藤型のハット・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{f},t}dt$ は，(9.3.59)-(9.3.61) とともに，(9.3.58) で与えられる．ただし，

$$\hat{H}_{\rm S} = \omega(s^z - \tilde{s}^z) + \mathit{\Delta}_1((s^z)^2 - (\tilde{s}^z)^2) + \mathit{\Delta}_2(s^+ s^- - \tilde{s}^+ \tilde{s}^-), \tag{9.5.195}$$

$$\hat{\mathit{\Pi}}_{\rm R} = \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10}) \left\{ (s^+ - \tilde{s}^-)(\mu s^- + \nu \tilde{s}^+) + {\rm t.c.} \right\}, \tag{9.5.196}$$

$$\hat{\mathit{\Pi}}_{\rm D} = \frac{1}{2}(\mu\gamma_{01} + \nu\gamma_{10}) \left\{ (s^+ - \tilde{s}^-)(\tilde{s}^+ - s^-) + {\rm t.c.} \right\} - \frac{1}{2}\zeta(s^z - \tilde{s}^z)^2, \tag{9.5.197}$$

および,

$$d\hat{M}_t = \left[(s^+ - \tilde{s}^-) dW_t - {\rm t.c.} \right] + (s^z - \tilde{s}^z) d\mathit{\Omega}_t^z \tag{9.5.198}$$

である． μ と ν は $\mu + \nu = 1$ を満たす任意の実数であり， dW_t と $d\mathit{\Omega}_t^z$ は

$$dW_t = \mu dF_t^- + \nu d\tilde{F}_t^+, \quad d\mathit{\Omega}_t^z = \frac{dF_t^z + d\tilde{F}_t^z}{2} \tag{9.5.199}$$

で定義される．

s^x, s^y, s^z に対する伊藤型の量子 Langevin 方程式は，それぞれ，

$$\begin{aligned} ds^x(t) = & -(\omega + \mathit{\Delta}_2) s^y(t) dt - (\mathit{\Delta}_1 - \mathit{\Delta}_2)\{s^y(t),\ s^z(t)\} dt \\ & - \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10}) \left[i s^y(t) + 2 s^z(t) \tilde{s}^x(t) \right. \\ & \left. + i(\mu - \nu)(\{s^z(t),\ s^y(t)\} - 2 s^z(t) \tilde{s}^y(t)) \right] dt \\ & - (\mu\gamma_{01} + \nu\gamma_{10}) s^x(t) dt - \frac{1}{2}\zeta s^x(t) dt \\ & + d\mathit{\Omega}^y(t) s^z(t) - d\mathit{\Omega}^z(t) s^y(t), \end{aligned} \tag{9.5.200}$$

$$\begin{aligned} ds^y(t) = & (\omega + \mathit{\Delta}_2) s^x(t) dt + (\mathit{\Delta}_1 - \mathit{\Delta}_2)\{s^z(t),\ s^x(t)\} dt \\ & - \frac{1}{2}(\gamma_{01} - \gamma_{10}) \left[-i s^x(t) + 2 s^z(t) \tilde{s}^y(t) \right. \\ & \left. + i(\mu - \nu)(\{s^z(t),\ s^x(t)\} - 2 s^z(t) \tilde{s}^x(t)) \right] dt \\ & - (\mu\gamma_{01} + \nu\gamma_{10}) s^y(t) dt - \frac{1}{2}\zeta s^y(t) dt \\ & + d\mathit{\Omega}^z(t) s^x(t) - d\mathit{\Omega}^x(t) s^z(t), \end{aligned} \tag{9.5.201}$$

$$ds^z(t) = -2(\mu\gamma_{01} + \nu\gamma_{10}) s^z(t) dt$$

$$
\begin{aligned}
&+(\gamma_{01}-\gamma_{10})\,[s^x(t)\tilde{s}^x(t)+s^y(t)\tilde{s}^y(t)\\
&+i(\nu-\mu)(\tilde{s}^x(t)s^y(t)-\tilde{s}^y(t)s^x(t))]\,dt\\
&+d\Omega^x(t)s^y(t)-d\Omega^y(t)s^x(t)
\end{aligned}
\tag{9.5.202}
$$

となる．ただし，反交換関係子 $\{A,\ B\}=AB+BA$ を導入した．

$$
d\Omega_t^x=dW_t+d\tilde{W}_t,\quad d\Omega_t^y=i(dW_t-d\tilde{W}_t)
\tag{9.5.203}
$$

で定義される演算子 $d\Omega_t^x$, $d\Omega_t^y$ の Heisenberg 表示における演算子の表記として $d\Omega^x(t)$, $d\Omega^y(t)$ を導入した．$\#=x,\,y,\,z$ に対して

$$
d\tilde{\Omega}^{\#}(t)=d\Omega^{\#}(t)
\tag{9.5.204}
$$

が成立する．

ブラ・ベクトル $\langle\!\langle 1|s^x(t)$, $\langle\!\langle 1|s^y(t)$, $\langle\!\langle 1|s^z(t)$ に対する伊藤型の方程式は，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
d\langle\!\langle 1|s^x(t)=&-(\omega+\Delta_2)\langle\!\langle 1|s^y(t)dt\\
&-(\Delta_1-\Delta_2)\langle\!\langle 1|\{s^y(t),\ s^z(t)\}dt\\
&-\frac{1}{2}(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)\langle\!\langle 1|s^x(t)dt\\
&-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})\langle\!\langle 1|\{s^z(t),\ s^x(t)\}dt\\
&+\langle\!\langle 1|dF_t^y s^z(t)-\langle\!\langle 1|dF_t^z s^y(t),
\end{aligned}
\tag{9.5.205}
$$

$$
\begin{aligned}
d\langle\!\langle 1|s^y(t)=&(\omega+\Delta_2)\langle\!\langle 1|s^x(t)dt\\
&+(\Delta_1-\Delta_2)\langle\!\langle 1|\{s^z(t),\ s^x(t)\}dt\\
&-\frac{1}{2}(\gamma_{01}+\gamma_{10}+\zeta)\langle\!\langle 1|s^y(t)dt\\
&-\frac{1}{2}(\gamma_{01}-\gamma_{10})\langle\!\langle 1|\{s^y(t),\ s^z(t)\}dt\\
&+\langle\!\langle 1|dF_t^z s^x(t)-\langle\!\langle 1|dF_t^x s^z(t),
\end{aligned}
\tag{9.5.206}
$$

$$d\langle\!\langle 1|s^z(t) = -(\gamma_{01}+\gamma_{10})\langle\!\langle 1|s^z(t)dt \\ +(\gamma_{01}-\gamma_{10})\langle\!\langle 1|\left\{[s^x(t)]^2+[s^y(t)]^2\right\}dt \\ +\langle\!\langle 1|dF_t^x s^y(t) - \langle\!\langle 1|dF_t^y s^x(t) \tag{9.5.207}$$

となる．ただし，

$$dF_t^x = dF_t^- + dF_t^+, \quad dF_t^y = i(dF_t^- - dF_t^+) \tag{9.5.208}$$

で定義される演算子 dF_t^x, dF_t^y を導入した．

伊藤型量子 Langevin 方程式 (7.5.195)-(7.5.197) の構造は，それぞれ，(9.5.205)-(9.5.207) の構造と一致している．前者 3 式は柴田・橋爪の手続き（射影演算子手法）[101] により導出されたものであり，後者 3 式は NETFD の枠内で導出されたものである．ここでも，S-H Langevin 方程式が伊藤型の確率微分方程式であることが支持されている．

9.6 森の公式（再考）

3.4 節で紹介された森の公式 (3.4.125)-(3.4.129) [100] を，NETFD の体系で再定式化してみよう．粗視変数に対応したオブザーバブル $A_i (i=1,2,\cdots,n)$ を成分とする行ベクトル

$$A = (A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)^{\mathrm{T}} \tag{9.6.209}$$

を考える．T は転置を表す．これは，NETFD における Heisenberg 方程式

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[\hat{H},\ A(t)] \tag{9.6.210}$$

を満たす．ただし，

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{9.6.211}$$

で，H は考察している系のハミルトニアンである．ハット・ハミルトニアンはブ

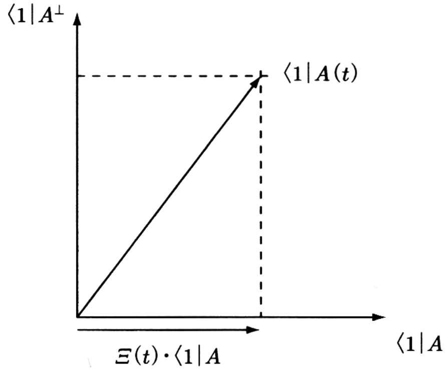


図 9.1 熱空間におけるブラ・ベクトル状態 $\langle 1|A(t)$ を 2 つの部分空間 $\langle 1|A$ と $\langle 1|A^{\perp}$ に分解する概念図.

ラ真空を消去する（8.2 節の **B2** 参照）：

$$\langle 1|\hat{H} = 0. \tag{9.6.212}$$

Heisenberg 方程式の形式解は,

$$A(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t} A \mathrm{e}^{-i\hat{H}t} \tag{9.6.213}$$

で与えられる. これは Heisenberg 演算子である.

熱空間のブラ・ベクトル $\langle 1|A(t)$ を, 2 つの部分空間に分解する（図 9.1）[116]. 1 つは $\langle 1|A_i(i=1,2,\cdots,n)$ で張られる部分空間 $\langle 1|A$, もう 1 つはそれと直交する部分空間である. 後者の部分空間を $\langle 1|A^{\perp}$ と記してある. ブラ・ベクトル $\langle 1|A$ の部分空間への射影演算子として,

$$\mathcal{P} = A^{\dagger}|0\rangle \cdot \langle 1|AA^{\dagger}|0\rangle^{-1} \cdot \langle 1|A \tag{9.6.214}$$

を採用しよう. ケット真空 $|0\rangle$ は,

$$\hat{H}|0\rangle = 0 \tag{9.6.215}$$

を満たすものとする.

ブラ・ベクトル $\langle 1|A(t)$ の運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}\langle 1|A(t) = i\langle 1|[\hat{H},\ A(t)] = -i\langle 1|A(t)\hat{H}$$
$$= -i\langle 1|A\hat{H}\mathrm{e}^{-i\hat{H}t} = i\langle 1|[\hat{H},\ A]\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}$$
$$= \langle 1|\dot{A}\mathrm{e}^{-i\hat{H}t} = i\Omega\langle 1|A(t) + \langle 1|F(t) \tag{9.6.216}$$

とかける．ただし，

$$F(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t}F\mathrm{e}^{-i\hat{H}t},\quad F = \dot{A} - i\Omega A,\quad \dot{A} = i[\hat{H},\ A], \tag{9.6.217}$$
$$i\Omega = \langle 1|\dot{A}A^{\dagger}|0\rangle\cdot\langle 1|AA^{\dagger}|0\rangle^{-1} \tag{9.6.218}$$

を導入して用いた．(9.6.216) を導出するに当たって，(9.6.212) を用いた．F は

$$\langle 1|FA^{\dagger}|0\rangle = 0 \tag{9.6.219}$$

を満たしていることが容易く示せる．

ここで，

$$R(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t(1-P)}R(0)\mathrm{e}^{-i\hat{H}t(1-P)},\quad R(0) = F \tag{9.6.220}$$

を導入しよう．関係式

$$\langle 1|X(1-P)A^{\dagger}|0\rangle = 0 \tag{9.6.221}$$

より，

$$\langle 1|R(t)A^{\dagger}|0\rangle = 0 \tag{9.6.222}$$

の成立がわかる．これは，ベクトル $\langle 1|R(t)$ が，部分空間 $\langle 1|A^{\perp}$ に属していることを表している．公式

$$e^{-i\hat{H}t(1-P)} = e^{-i\hat{H}t} + \int_0^t ds e^{i\hat{H}(s-t)(1-P)} i\hat{H}Pe^{-i\hat{H}s} \tag{9.6.223}$$

を利用すると，2 つのケット・ベクトル $\langle 1|R(t)$ と $\langle 1|F(t)$ の関係

$$\langle 1|R(t) = \langle 1|F(t) + \int_0^t ds \Gamma(t-s)\langle 1|A(s) \tag{9.6.224}$$

が得られる．ただし，

$$\Gamma(t) = \langle 1|R(t)R^\dagger(0)|0\rangle \cdot \langle 1|AA^\dagger|0\rangle^{-1} \tag{9.6.225}$$

とおいた．(9.6.224) の導出に当たって，(9.6.212) と (9.6.215) を用いた．

(9.6.224) を (9.6.216) に代入すると，最終的に

$$\frac{d}{dt}\langle 1|A(t) = i\Omega\langle 1|A(t) - \int_0^t ds \Gamma(t-s)\langle 1|A(s) + \langle 1|R(t) \tag{9.6.226}$$

を得る．ただし，$i\Omega$, $\Gamma(t)$ は，それぞれ，(9.6.218), (9.6.225) で定義されている．ブラ・ベクトル $\langle 1|A(t)$ に対する運動方程式 (9.6.226) は，森の公式 [100] そのものであり，その本来の適切な解釈を与えている．$R(t)$ が直交性 (9.6.222) を満たすことは重要である．これにより，森の公式 (9.6.226) が，あたかも伊藤型 Langevin 方程式のように見えるのである．

オブザーバブル・ブラ・ベクトル $\langle 1|A(t)$ が「装備された Hilbert 空間（rigged Hilbert space）」 [124] に属することを想起すると，(9.6.226) の表記は，森の公式を Langevin 方程式に移行する可能性に関して，深遠なからくりを垣間見せているものと考えられる（8.5 節参照）．「装備された Hilbert 空間」は，ケット真空 $|0\rangle$ 上につくられたケット基底で張られる核空間と，その双対空間に属する基底で張られる特異空間により構成されている．双対空間は核空間よりはるかに広く，双対空間に属するブラ・ベクトル $\langle 1|A^\perp$ が張る部分空間は多様性に富んでいると考えられる．この多様性が，森の公式を通常の微分方程式から確率微分方程式へとジャンプさせる可能性を秘めていると期待される．この観点は散逸の本質に迫るものであり，今後のさらなる考察が必要である．

ところで，$\langle 1|R(t)$ と $A^\dagger|0\rangle$ の間に成立する直交性 (9.6.222) を利用すると，相関行列

$$\Xi(t) = \langle 1|A(t)A^{\dagger}|0\rangle \cdot \langle 1|AA^{\dagger}|0\rangle^{-1} \tag{9.6.227}$$

に対する運動方程式

$$\frac{d}{dt}\Xi(t) = i\Omega\Xi(t) + \int_0^t ds\Gamma(t-s)\Xi(s) \tag{9.6.228}$$

が得られる．$i\Omega$ と $\Xi(t)$ は，

$$i\Omega = \frac{d}{dt}\Xi(t)\Big|_{t=0} \tag{9.6.229}$$

にて関連している．なお，

$$\langle 1|A(t)|0\rangle = \langle 1|A|0\rangle \tag{9.6.230}$$

((9.6.212), (9.6.215) 参照）であるので，$\langle 1|A|0\rangle = 0$ と設定して，$\Xi(t)$ を 2 次キュムラント行列とすることができる．

9.7 S-H Langevin 方程式（再考）

柴田と橋爪 [101] のとった手続きを NETFD の体系で再考してみよう [119, 120]．彼らの議論は，NETFD における Heisenberg 方程式

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[\hat{H}(t),\ A(t)] \tag{9.7.231}$$

から始まる．ただし，

$$\hat{H}(t) = \mathrm{e}^{i\hat{H}t}\hat{H}\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{H} = H - \tilde{H} \tag{9.7.232}$$

である．ハミルトニアン H は 2 つの部分に分けられる：

$$H = H_0 + H_1, \qquad H_0 = H_{\mathrm{S}} + H_{\mathrm{R}}. \tag{9.7.233}$$

$H_{\rm S}$ と $H_{\rm R}$ は，それぞれ，注目系と非注目系の自由ハミルトニアンであり，H_1 は注目系と非注目系の間の相互作用ハミルトニアンを表す．

便宜のため，時間発展演算子 $\hat{U}(t,0)$ を，

$$\mathrm{e}^{-i\hat{H}t} = \mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t,0) \tag{9.7.234}$$

の関係にて導入する．$\hat{U}(t,s)$ は，初期条件 $\hat{U}(s,s)=1$ の下に，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t,s) = -i\hat{H}_1^{\rm I}(t)\hat{U}(t,s) \tag{9.7.235}$$

を満たす．

射影演算子 $\mathcal{P}$ により，表式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{U}(t,s) = -i\hat{H}_1^{\rm I}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t,s) - \int_s^t dt'\,\hat{H}_1^{\rm I}(t)\hat{U}_{QQ}(t,t')\hat{H}_{1,QP}^{\rm I}(t')\mathcal{P}\hat{U}(t',s)\\ -i\hat{H}_1^{\rm I}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\mathcal{Q}\end{aligned} \tag{9.7.236}$$

を得ることができる．射影演算子 $\mathcal{P}$ は，$\mathcal{P}^2=\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^\dagger=\mathcal{P}$ を満たす．$\mathcal{Q}$ は，$\mathcal{Q}=1-\mathcal{P}$ である．$\hat{U}_{QQ}(t,s)$ は，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_{QQ}(t,s) = -i\hat{H}_{1,QQ}^{\rm I}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s) \tag{9.7.237}$$

により導入した．初期条件は，$\hat{U}_{QQ}(s,s)=1$ とする．記法

$$\hat{H}_{1,QQ}^{\rm I}(t) = \mathcal{Q}\hat{H}_1^{\rm I}(t)\mathcal{Q}, \quad \hat{H}_{1,QP}^{\rm I}(t) = \mathcal{Q}\hat{H}_1^{\rm I}(t)\mathcal{P} \tag{9.7.238}$$

を導入した．

Heisenberg 表示の演算子 $A(t)$ は相互作用表示の演算子 $A^{\rm I}(t)$ と，

$$A(t) = \hat{U}^{-1}(t,0)A^{\rm I}(t)\hat{U}(t,0) \tag{9.7.239}$$

により関連している．真空 $\langle\!\langle 1| = \langle| \otimes \langle 1|$ を (9.7.239) に施すと

$$\langle\!\langle 1|A(t) = \langle\!\langle 1|\hat{U}^{-1}(t,0)A^{\mathrm{I}}(t)\hat{U}(t,0)$$
$$= \langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\hat{U}(t,0) \tag{9.7.240}$$

を得る．ただし，確率の保存を保証する性質

$$\langle\!\langle 1|\hat{H} = 0, \quad \langle\!\langle 1|\hat{H}_0 = 0 \tag{9.7.241}$$

を用いた．$\langle 1|$ は注目系のブラ真空で，$\langle|$ は非注目系のブラ真空である．

オブザーバブル $A(t)$（非チルダ演算子のみで記されている）のベクトル $\langle\!\langle 1|A(t)$ を微分すると

$$\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) = i\langle\!\langle 1|[\hat{H}_0(t),\ A^{\mathrm{I}}(t)]\hat{U}(t,0) + \langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\frac{d}{dt}\hat{U}(t,0) \tag{9.7.242}$$

となるが，これに (9.7.236) を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) &= -i\langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\left(\hat{H}_0 + \hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)\mathcal{P}\right)\hat{U}(t,0)\\ &\quad - \int_0^t dt'\,\langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)\hat{U}_{QQ}(t,t')\hat{H}_{1,QP}^{\mathrm{I}}(t')\mathcal{P}\hat{U}(t',0)\\ &\quad - i\langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)\hat{U}_{QQ}(t,0)\mathcal{Q}\end{aligned} \tag{9.7.243}$$

が得られる．

(9.7.243) を Langevin 方程式へ移行するために柴田と橋爪 [101] が採用した処方箋は，NETFD の体系では以下のようになる．

第 1 処方：射影演算子として $\mathcal{P} = |\rangle\langle|$ を採用する．

第 2 処方：(9.7.243) の右辺各項で，$\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)$ に関して展開し，意味のある最低次までをとる．

第 3 処方：乱雑力演算子に依存する右辺最後の項において，相互作用表示の注目系演算子を Heisenberg 表示の演算子に置き換える．

第 1 と第 2 の処方箋により，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) &= -i\langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\left(\hat{H}_{\mathrm{S}}+\langle\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)\rangle\right)\hat{U}(t,0) \\
&\quad -\int_0^t dt'\,\langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\langle\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)\hat{H}_{1,QP}^{\mathrm{I}}(t')\rangle\hat{U}(t',0)-i\langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t) \\
&= -i\langle\!\langle 1|A(t)\hat{H}_{\mathrm{S}}(t)-\int_0^t dt'\,\langle\!\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t,0)\langle\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t')\rangle\hat{U}(t',0) \\
&\quad -i\langle\!\langle 1|A^{\mathrm{I}}(t)\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)
\end{aligned}
\tag{9.7.244}
$$

を得る．ただし，

$$
\langle\hat{H}_1^{\mathrm{I}}(t)\rangle=0 \tag{9.7.245}
$$

を仮定した．表記を簡単にするため，非注目系の真空に関する期待値を $\langle\cdots\rangle=\langle|\cdots|\rangle$ と記した．

第 3 の処方箋を採用し，あわせて長時間極限（van Hove 極限）をとると，最終的に

$$
\begin{aligned}
d\langle\!\langle 1|A(t) &= i\langle\!\langle 1|[H_{\mathrm{S}}(t),\ A(t)]dt \\
&\quad +\kappa\langle\!\langle 1|\{a^\dagger(t)[A(t),\ a(t)]+[a^\dagger(t),\ A(t)]a(t)\}dt \\
&\quad +2\kappa\bar{n}\langle\!\langle 1|[a^\dagger(t),\ [A(t),\ a(t)]]dt \\
&\quad +\langle\!\langle 1|[A(t),\ a^\dagger(t)]\sqrt{2\kappa}\ dB_t\ +\langle\!\langle 1|\sqrt{2\kappa}\ dB_t^\dagger[a(t),\ A(t)]
\end{aligned}
\tag{9.7.246}
$$

が得られる．ただし，

$$
\kappa(\bar{n}+1)=\Re\mathrm{e}\ g^2\int_0^\infty dt\ \langle b_t\ b^\dagger\rangle \mathrm{e}^{i\omega t},\quad \bar{n}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\omega/T}-1} \tag{9.7.247}
$$

である．T は非注目系（環境系）の温度である．(9.7.246) の導出に当たって，注目系の自由ハミルトニアンと相互作用ハミルトニアンを，それぞれ，

$$
H_{\mathrm{S}}=\omega a^\dagger a,\quad H_1=g\left(a^\dagger b+b^\dagger a\right) \tag{9.7.248}
$$

とした．注目系の演算子は，正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1 \tag{9.7.249}$$

を満たす．(9.7.246) は，(9.4.174) と同一である．また，量子 Brown 運動を記述する演算子 dB_t と $dB_t^\dagger$ は，

$$dB_t = b_t dt, \quad dB_t^\dagger = b_t^\dagger dt \tag{9.7.250}$$

で定義される．ただし，b_t と $b_t^\dagger$ は，正準交換関係

$$[b_t,\ b_{t'}^\dagger] = \delta(t - t') \tag{9.7.251}$$

を満たす量子白色雑音 [121, 122, 123] として導入された演算子で，その存在が保証されている．量子 Brown 演算子は，

$$\langle dB_t \rangle = \langle dB_t^\dagger \rangle = 0, \tag{9.7.252}$$

$$\langle dB_t^\dagger dB_t \rangle = \bar{n} dt, \qquad \langle dB_t dB_t^\dagger \rangle = (\bar{n} + 1)\, dt \tag{9.7.253}$$

を満たす．

付　録

A.1　関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ の具体的な形

外部環境をモデル化することによって量子マスター方程式に現れる関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ の具体的な形を決定しよう．そこで，外部環境が独立な調和振動子の集団で構成されると仮定し，外部環境と量子ビットの相互作用ハミルトニアンに現れる演算子 R が $R=(1/\lambda_{\perp})\sum_k \lambda_{k a_k}$ で与えられるものとする．ここで，a_k は外部環境を構成する k 番目の調和振動子の消滅演算子である．このとき，関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は次の式で与えられる．

$$\phi_{-+}(t)=\sum_k \lambda_k^2 \int_0^t dt\,\langle a_k(t')a_k^\dagger(0)\rangle_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{i\omega t'}, \tag{A.1.1}$$

$$\phi_{+-}(t)=\sum_k \lambda_k^2 \int_0^t dt\,\langle a_k^\dagger(t')a_k(0)\rangle_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-i\omega t'}. \tag{A.1.2}$$

さらに，外部環境が絶対温度 T の熱平衡状態にあり，k 番目の調和振動子の緩和時間が $\tau(\omega_k)$ であると仮定すれば，相関関数 $\langle a_k(t)a_k^\dagger(0)\rangle_{\mathrm{R}}$ と $\langle a_k^\dagger(t)a_k(0)\rangle_{\mathrm{R}}$ は次の形に設定することができる．

$$\langle a_k(t)a_k^\dagger(0)\rangle_{\mathrm{R}}=[\bar{n}(\omega_k)+1]\mathrm{e}^{-i\omega_k t-t/\tau(\omega_k)}, \tag{A.1.3}$$

$$\langle a_k^\dagger(t)a_k(0)\rangle_{\mathrm{R}}=\bar{n}(\omega_k)\mathrm{e}^{i\omega_k t-t/\tau(\omega_k)}. \tag{A.1.4}$$

ここで，$\bar{n}(\omega)=(\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T}-1)^{-1}$ である．このような相関関数は NETFD を用いれば，簡単に導くことができる．これらの相関関数を (A.1.1) と (A.1.2) に代入すれば，関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は次のようになる．

$$\phi_{-+}(t) = \sum_k \lambda_k^2 [\bar{n}(\omega_k)+1]\tau(\omega_k) \frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega-\omega_k)t - t/\tau(\omega_k)}}{1-i(\omega-\omega_k)\tau(\omega_k)}, \tag{A.1.5}$$

$$\phi_{+-}(t) = \sum_k \lambda_k^2 \bar{n}(\omega_k)\tau(\omega_k) \frac{1-\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_k)t - t/\tau(\omega_k)}}{1+i(\omega-\omega_k)\tau(\omega_k)}. \tag{A.1.6}$$

また，次の式で定義される外部環境のスペクトル密度関数 $D(\omega)$ を導入する．

$$D(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_k \lambda_k^2 \tau(\omega_k)\delta(\omega-\omega_k). \tag{A.1.7}$$

スペクトル密度関数 $D(\omega)$ を用いると，(A.1.5) と (A.1.6) の右辺の和は積分で置き換えられ，関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は次の形に表すことができる．

$$\phi_{-+}(t) = \pi \int d\omega' D(\omega')[\bar{n}(\omega')+1] \frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega-\omega')t - t/\tau(\omega')}}{1-i(\omega-\omega')\tau(\omega')}, \tag{A.1.8}$$

$$\phi_{+-}(t) = \pi \int d\omega' D(\omega')\bar{n}(\omega') \frac{1-\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega')t - t/\tau(\omega')}}{1+i(\omega-\omega')\tau(\omega')}. \tag{A.1.9}$$

スペクトル密度関数 $D(\omega')$ が量子ビットの遷移振動数 ω を中心に鋭いピークをもち，近似的に $D(\omega') \approx D\delta(\omega'-\omega)$ とおくことができる場合を考える．このとき，関数 $\phi_{-+}(t)$ と $\phi_{+-}(t)$ は次のようになる．

$$\phi_{-+}(t) = \kappa(\bar{n}+1)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}}), \tag{A.1.10}$$

$$\phi_{+-}(t) = \kappa\bar{n}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{R}}}). \tag{A.1.11}$$

ここで，$\kappa = \pi D(\omega)$, $\bar{n} = \bar{n}(\omega)$，および $\tau_{\mathrm{R}} = \tau(\omega)$ とおいた．相関時間 τ_{R} が十分に短い場合には $\phi_{-+}(\infty) \approx \kappa(\bar{n}+1)$，および $\phi_{+-}(\infty) \approx \kappa\bar{n}$ となる．

A.2 量子力学の c-数関数表現

A.2.1 演算子の c-数関数表現

密度行列で記述される量子状態を c-数関数を用いて表現する方法を説明する．

このために，まず並進演算子 $D(\alpha)=\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}$ の性質を調べよう．消滅演算子 a と生成演算子 $a^\dagger$ が交換関係 $[a,a^\dagger]=1$ を満足することを用いれば，並進演算子 $D(\alpha)$ に対して次の一連の関係式を導くことができる．

$$D(\alpha)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^* a}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{-\alpha^* a}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}, \tag{A.2.12}$$

$$D^\dagger(\alpha)=D(-\alpha), \tag{A.2.13}$$

$$D(\alpha)D(\beta)=D(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}, \tag{A.2.14}$$

$$D(\alpha)aD^\dagger(\alpha)=a-\alpha, \tag{A.2.15}$$

$$D(\alpha)a^\dagger D^\dagger(\alpha)=a^\dagger-\alpha^*. \tag{A.2.16}$$

真空状態 $|0\rangle$ に並進演算子 $D(\alpha)$ を作用させて得られる量子状態 $|\alpha\rangle=D(\alpha)|0\rangle$ はコヒーレント状態とよばれる．(A.2.12)-(A.2.16) からコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は次の性質を満足する．

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle, \tag{A.2.17}$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle=\mathrm{e}^{\alpha^*\beta-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2}. \tag{A.2.18}$$

また，粒子数固有状態 $|n\rangle=(1/\sqrt{n!})a^{\dagger\,n}|0\rangle$ の完全性関係 $\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=1$ から，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は次のような完全性関係を満足する．

$$\int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|=1. \tag{A.2.19}$$

この式はコヒーレント状態を $|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n/\sqrt{n!})|n\rangle$ のように展開し，$\alpha=|\alpha|\mathrm{e}^{i\theta}$ とおいて位相，振幅の順に積分を実行することによって導くことができる．さらに，コヒーレント状態の完全性関係 (A.2.19) と並進演算子 $D(\alpha)$ の性質 (A.2.15) と (A.2.16) から，次の式を導くことができる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[D(\alpha)]&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle\beta|D(\alpha)|\beta\rangle\\&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle 0|D^\dagger(\beta)D(\alpha)D(\beta)|0\rangle\\&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle 0|D(\alpha)|0\rangle\mathrm{e}^{\alpha\beta^*-\alpha^*\beta}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \int \frac{d^2\beta}{\pi} e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} \\
&= \pi\delta^{(2)}(\alpha). \qquad \text{(A.2.20)}
\end{aligned}
$$

最後の等号では 2 次元 δ-関数の Fourier 積分表現を用いた.

$$
\pi\delta^{(2)}(\alpha) = \int \frac{d^2\beta}{\pi} e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}. \qquad \text{(A.2.21)}
$$

したがって，(A.2.13) と (A.2.14) から，一般に並進演算子 $D(\alpha)$ は次の関係式を満足することがわかる.

$$
\mathrm{Tr}[D(\alpha)D^\dagger(\beta)] = \pi\delta^{(2)}(\alpha - \beta). \qquad \text{(A.2.22)}
$$

並進演算子 $D(\alpha)$ に対する以上の結果を用いれば，Δ-演算子 $\Delta_s(z)$ の性質 (4.3.105)-(4.3.107) を導くことができる．まず，(4.3.105) は次のようにして示すことができる.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)] &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \mathrm{Tr}\ [D(\alpha)]\, e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2 - \alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \pi\delta^{(2)}(\alpha) e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2 - \alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= 1. \qquad \text{(A.2.23)}
\end{aligned}
$$

また，(4.3.106) は δ-関数の Fourier 積分表現を用いて導くことができる.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^2 z}{\pi} \Delta_s(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha) e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha) e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2} \pi\delta^{(2)}(\alpha) \\
&= 1. \qquad \text{(A.2.24)}
\end{aligned}
$$

さらに，(4.3.107) は次のようにして導くことができる.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(z')] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \mathrm{Tr}[D(\alpha)D(\beta)] \mathrm{e}^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2 - \alpha z^* + \alpha^* z} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s|\beta|^2 - \beta z'^* + \beta^* z'} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \pi\delta^{(2)}(\alpha+\beta) \mathrm{e}^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2 - \alpha z^* + \alpha^* z} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s|\beta|^2 - \beta z'^* + \beta^* z'} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha(z-z')^* + \alpha^*(z-z')} \\
&= \pi\delta^{(2)}(z-z'). \qquad \text{(A.2.25)}
\end{aligned}
$$

ところで，パラメータ s の値が $s=-1$ の場合には，(A.2.12) から Δ-演算子 $\Delta_{-1}(z)$ は次のように計算することができる．

$$
\begin{aligned}
\Delta_{-1}(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha^* a} \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha^* a} |\beta\rangle\langle\beta| \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi} \left(\int \frac{d^2\alpha}{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha(z-\beta)^* + \alpha^*(z-\beta)} \right) |\beta\rangle\langle\beta| \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi} \pi\delta^{(2)}(z-\beta) |\beta\rangle\langle\beta| \\
&= |z\rangle\langle z|. \qquad \text{(A.2.26)}
\end{aligned}
$$

すなわち，$s=-1$ の場合の Δ-演算子 $\Delta_{-1}(z)$ はコヒーレント状態への射影演算子である．

以上の結果を用いて，任意の量子状態 ρ が (4.3.109) のように表せることを示そう．まず，次の式で定義される演算子 Υ を考える．

$$
\Upsilon = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \mathrm{Tr}[\rho D^\dagger(\alpha)] D(\alpha). \qquad \text{(A.2.27)}
$$

ここで，コヒーレント状態の完全性関係を用いれば，この式の右辺に現れるトレース $\mathrm{Tr}[\rho D^\dagger(\alpha)]$ は次のように計算することができる．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[\rho D^\dagger(\alpha)] \\
&= \int \frac{d^2 z_1}{\pi} \int \frac{d^2 z_2}{\pi} \langle z_1|\rho|z_2\rangle\langle z_2|D^\dagger(\alpha)|z_1\rangle \\
&= \int \frac{d^2 z_1}{\pi} \int \frac{d^2 z_2}{\pi} \langle z_1|\rho|z_2\rangle \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z_1|^2-\frac{1}{2}|z_2|^2-\frac{1}{2}|\alpha|^2+z_1 z_2^*+z_1\alpha^*-z_2^*\alpha}. \qquad \text{(A.2.28)}
\end{aligned}
$$

この結果を用いてコヒーレント状態による行列要素 $\langle\beta|\Upsilon|\gamma\rangle$ を計算すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\langle\beta|\Upsilon|\gamma\rangle &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho D^\dagger(\alpha)]\langle\beta|D(\alpha)|\gamma\rangle \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho D^\dagger(\alpha)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\beta|^2-\frac{1}{2}|\gamma|^2-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha\beta^*+\gamma\beta^*-\gamma\alpha^*} \\
&= \int \frac{d^2 z_1}{\pi} \int \frac{d^2 z_2}{\pi} \langle z_1|\rho|z_2\rangle \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z_1|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+z_1\beta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\gamma|^2-\frac{1}{2}|z_2|^2+z_2^*\gamma} \\
&= \int \frac{d^2 z_1}{\pi} \int \frac{d^2 z_2}{\pi} \langle\beta|z_1\rangle\langle z_1|\rho|z_2\rangle\langle z_2|\gamma\rangle \\
&= \langle\beta|\rho|\gamma\rangle. \qquad \text{(A.2.29)}
\end{aligned}
$$

この式は任意のコヒーレント状態 $|\beta\rangle$ と $|\gamma\rangle$ に対して成り立つので，コヒーレント状態の完全性関係から等号 $\Upsilon=\rho$ が成り立つことがわかる．したがって，任意の量子状態 ρ に対して次の式が成り立つ．

$$
\rho = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho D^\dagger(\alpha)]D(\alpha). \qquad \text{(A.2.30)}
$$

この結果は，量子状態 ρ の **Weyl 展開**とよばれる．ところで，Δ-演算子の定義式 (4.3.103) を逆 Fourier 変換することによって次の式が得られる．

$$
D(\alpha)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2} = \int \frac{d^2 z}{\pi}\Delta_s(z)\mathrm{e}^{\alpha z^*-\alpha^* z}. \qquad \text{(A.2.31)}
$$

この結果を (A.2.30) に代入することによって次の式を導くことができる．

$$\rho=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}\left[\rho\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2}\int\frac{d^2z'}{\pi}\Delta_{-s}(z')\mathrm{e}^{-\alpha z'^*+\alpha^* z'}\right)\right]$$
$$\times\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2}\int\frac{d^2z}{\pi}\Delta_s(z)\mathrm{e}^{\alpha z^*-\alpha^* z}\right)$$
$$=\int\frac{d^2z}{\pi}\int\frac{d^2z'}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z')]\Delta_s(z)\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{\alpha(z-z')^*-\alpha^*(z-z')}$$
$$=\int\frac{d^2z}{\pi}\int\frac{d^2z'}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z')]\Delta_s(z)\pi\delta^{(2)}(z-z')$$
$$=\int\frac{d^2z}{\pi}\mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(z)$$
$$=\int\frac{d^2z}{\pi}F_s(z)\Delta_s(z). \qquad \text{(A.2.32)}$$

したがって，(4.3.109) が成り立つ．一方，この式の両辺に $\Delta_{-s}(z)$ をかけてトレースを計算し，Δ-演算子が (4.3.107) を満足することを用いれば，(4.3.108) が成り立つことがわかる．

次に，(4.3.117)-(4.3.124) を導く．演算子 $D(\alpha,s)=D(\alpha)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2}$ とおけば，次の式が成り立つ．

$$D(\alpha,s)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(s-1)|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^* a}$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(s+1)|\alpha|^2}\mathrm{e}^{-\alpha^* a}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}. \qquad \text{(A.2.33)}$$

この式の両辺を α や α^* で微分することによって次の一連の式を導くことができる．

$$aD(\alpha,s)=\left[\frac{1}{2}(s+1)-\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right]D(\alpha,s), \qquad \text{(A.2.34)}$$
$$a^\dagger D(\alpha,s)=\left[-\frac{1}{2}(s-1)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]D(\alpha,s), \qquad \text{(A.2.35)}$$
$$D(\alpha,s)a=\left[\frac{1}{2}(s-1)-\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right]D(\alpha,s), \qquad \text{(A.2.36)}$$
$$D(\alpha,s)a^\dagger=\left[-\frac{1}{2}(s+1)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]D(\alpha,s). \qquad \text{(A.2.37)}$$

これらの結果を (4.3.108) に代入して部分積分を実行すれば，次の式が得られる．

$$a\Delta_s(z) = \left[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\right]\Delta_s(z), \tag{A.2.38}$$

$$a^\dagger\Delta_s(z) = \left[z^* - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\right]\Delta_s(z), \tag{A.2.39}$$

$$\Delta_s(z)a = \left[z - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\right]\Delta_s(z), \tag{A.2.40}$$

$$\Delta_s(z)a^\dagger = \left[z^* - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\right]\Delta_s(z). \tag{A.2.41}$$

そこで，(4.3.109) の左から消滅演算子 a を作用させて (A.2.38) を用いると次の式が得られる．

$$\begin{aligned} a\rho &= \int \frac{d^2z}{\pi} F_s(z) a\Delta_s(z) \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi} F_s(z)\left[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\right]\Delta_s(z) \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi}\left\{\left[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\right]F_s(z)\right\}\Delta_s(z) \end{aligned} \tag{A.2.42}$$

この結果は演算子 $a\rho$ を表す c-数関数 $F_s^a(z)$ が次の式で与えられることを示している．

$$F_s^a(z) = \left[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\right]F_s(z). \tag{A.2.43}$$

これは (4.3.117) で $n=1$ の場合である．まったく同様にして (4.3.117)–(4.3.124) で与えられるすべての関係式を導くことができる．

最後に，(4.3.112) を導く．まず，Δ-演算子の定義から $z^{*\,m}z^n\Delta_{-s}(z)$ は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} z^{*\,m}z^n\Delta_{-s}(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2} z^{*\,m}z^n \mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2}(-1)^m \frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^{*\,n}}\mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\left[(-1)^n \frac{\partial^m}{\partial\alpha^m}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^{*\,n}} D(\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2}\right]\mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \end{aligned} \tag{A.2.44}$$

この式の両辺を z で積分し，δ-関数の Fourier 積分表示を用いると次の式が得られる．

$$\int \frac{d^2z}{\pi} z^{*\,m} z^n \Delta_{-s}(z) = \{a^{\dagger\,m} a^n\}_s. \tag{A.2.45}$$

ここで，$\{a^{\dagger\,m} a^n\}_s$ は生成演算子と消滅演算の s-順序積 (4.3.113) である．この結果から次の式を導くことができる．

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2z}{\pi} z^{*\,m} z^n F_s(z) &= \int \frac{d^2z}{\pi} \mathrm{Tr}[\rho z^{*\,m} z^n \Delta_{-s}(z)] \\ &= \mathrm{Tr}[\rho\{a^{\dagger\,m} a^n\}_s] \\ &= \langle\{a^{\dagger\,m} a^n\}_s\rangle. \end{aligned} \tag{A.2.46}$$

A.2.2 Fokker-Planck 型微分方程式の解

次の式で与えられる Fokker-Planck 型の微分方程式の一般解が (4.3.126) と (4.3.127) で与えられることを示す．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} F_s(z;t) &= [\phi_{-+}(t) - \phi_{+-}(t)] \left(\frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial z^*} z^*\right) F_s(z;t) \\ &\quad + [(1+s)\phi_{-+}(t) + (1-s)\phi_{+-}(t)] \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} F_s(z;t). \end{aligned} \tag{A.2.47}$$

この微分方程式を解くために，次の式で定義される関数 $\tilde{F}_s(t;z)$ を導入する．

$$\tilde{F}_s(t;z) = \exp\left[-\Gamma(t,t')\left(\frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial z^*} z^*\right)\right] F_s(t;z). \tag{A.2.48}$$

ここで，パラメータ $\Gamma(t,t')$ は (4.3.128) で与えられる．このとき，関数 $\tilde{F}_s(t;z)$ は次の微分方程式を満足する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}_s(t;z) &= [(1+s)\phi_{-+}(t) + (1-s)\phi_{+-}(t)] \\ &\quad \times \mathrm{e}^{2\Gamma(t,t')} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \tilde{F}_s(t;z). \end{aligned} \tag{A.2.49}$$

ここで，次のような微分演算子の交換関係が成り立つことを用いた．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}, z\frac{\partial}{\partial z} + z^* \frac{\partial}{\partial z^*}\right] = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}. \tag{A.2.50}$$

微分方程式 (A.2.49) の形式的な解は次の式で与えられる．

$$\tilde{F}_s(t; z) = \mathrm{e}^{\tilde{D}_s(t,t')\frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}} \tilde{F}_s(t'; z). \tag{A.2.51}$$

ここで，関数 $\tilde{D}_s(t, t')$ は次の式で定義される．

$$\tilde{D}_s(t, t') = \int_{t'}^{t} d\tau \, [(1+s)\phi_{-+}(\tau) + (1-s)\phi_{+-}(\tau)]\mathrm{e}^{2\Gamma(\tau, t')}. \tag{A.2.52}$$

以上の結果から，異なる時刻の関数 $F_s(t; z)$ と $F_s(t'; z)$ は次の関係式によって結ばれることがわかる．

$$F_s(t; z) = \mathrm{e}^{\Gamma(t,t')\left(\frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial z^*} z^*\right)} \mathrm{e}^{D_s(t,t')\frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}} F_s(t'; z). \tag{A.2.53}$$

初期時刻を $t = 0$ とするとき，Fokker-Planck 型の微分方程式 (4.3.125) の Green 関数 $G_s(z|z'; t)$ は次の式で与えられる．

$$G_s(z|z'; t) = \mathrm{e}^{\Gamma(t,0)\left(\frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial z^*} z^*\right)} \mathrm{e}^{D_s(t,0)\frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}} \pi\delta^{(2)}(z - z'). \tag{A.2.54}$$

このように定義された Green 関数 $G_s(z|z'; t)$ は次の関係式を満足する．

$$F_s(z; t) = \int \frac{d^2 z'}{\pi} G_s(z|z'; t) F_s(z'; 0), \tag{A.2.55}$$

$$G_s(z|z'; 0) = \pi\delta^{(2)}(z - z'). \tag{A.2.56}$$

このとき，δ-関数の Fourier 積分表示と関係式 $\mathrm{e}^{az\partial/\partial z} f(z) = f(\mathrm{e}^a z)$ が成り立つことを用いれば，Green 関数 $G_s(z|z'; 0)$ を次のように計算することができる．

$$
\begin{aligned}
G_s(z|z';t) &= \mathrm{e}^{\Gamma(t,0)\left(\frac{\partial}{\partial z}z+\frac{\partial}{\partial z^*}z^*\right)}\mathrm{e}^{\tilde{D}_s(t,0)\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}}\pi\delta^{(2)}(z-z') \\
&= \mathrm{e}^{\Gamma(t,0)\left(\frac{\partial}{\partial z}z+\frac{\partial}{\partial z^*}z^*\right)}\mathrm{e}^{\tilde{D}_s(t,0)\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{\alpha^*(z-z')-\alpha(z^*-z'^*)} \\
&= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{\Gamma(t,0)\left(\frac{\partial}{\partial z}z+\frac{\partial}{\partial z^*}z^*\right)}\mathrm{e}^{\tilde{D}_s(t,0)\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}}\mathrm{e}^{\alpha^*(z-z')-\alpha(z^*-z'^*)} \\
&= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\tilde{D}_s(t,0)|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\Gamma(t,0)\left(\frac{\partial}{\partial z}z+\frac{\partial}{\partial z^*}z^*\right)}\mathrm{e}^{\alpha^*(z-z')-\alpha(z^*-z'^*)} \\
&= \mathrm{e}^{2\Gamma(t,0)}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\tilde{D}_s(t,0)|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha^*(z\mathrm{e}^{\Gamma(t,0)}-z')-\alpha(z^*\mathrm{e}^{\Gamma(t,0)}-z'^*)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\Gamma(t,0)}}{\tilde{D}_s(t,0)}\exp\left[-\frac{|z\mathrm{e}^{\Gamma(t,0)}-z'|^2}{\tilde{D}_s(t,0)}\right] \\
&= \frac{1}{D_s(t,0)}\exp\left[-\frac{|z-z'\mathrm{e}^{-\Gamma(t,0)}|^2}{D_s(t,0)}\right].
\end{aligned}
\tag{A.2.57}
$$

ここで，パラメータ $D_s(t,t')$ は (4.3.129) で与えられる．したがって，Fokker-Planck 型の微分方程式 (4.3.125) の一般解は (4.3.126) と (4.3.127) で与えられることが示された．

A.3 確率過程の基礎

A.3.1 確率過程

確率変数 X を考える．確率変数 X がとり得る値 x の全体から成る集合を Ω_X と表し，確率変数 X が値 x をとる確率 $\mathrm{Prob}[X=x]$ を $P(x)$ と表すものとする．確率 $P(x)$ は次の条件を満足する．

$$
P(x)\geq 0, \qquad \sum_{x\in\Omega_X}P(x)=1. \tag{A.3.58}
$$

確率変数 X の任意の解析関数 $F(X)$ の平均値 $\langle F(X)\rangle$ は次の式で与えられる．

$$
\langle F(X)\rangle=\sum_{x\in\Omega_X}F(x)P(x). \tag{A.3.59}
$$

確率変数 X が連続的な値をとる場合には，各式に現れる和 $\sum_{x\in\Omega_X}(\cdots)$ は積分 $\int_{x\in\Omega_X}(\cdots)d\mu(x)$ で置き換えられる．ここで，$\mu(x)$ は適当な確率測度である．ま

た，確率変数 X が連続的な値をとる場合，$P(x)$ は確率密度とよばれるが，以下では離散的な場合と連続的な場合を区別せず単に確率とよぶことにする．離散的な値をとる確率変数 X は離散確率変数とよばれ，連続的な値をとる確率変数 X は連続確率変数とよばれる．関数 $F(x)$ が $\mathrm{e}^{i\lambda x}$ で与えられるとき，平均値 $\langle F(X)\rangle$ は確率変数 X の特性関数とよばれ，$\Phi(\lambda)$ と表す．

$$\Phi(\lambda) = \langle \exp(i\lambda X)\rangle. \tag{A.3.60}$$

特性関数 $\Phi(\lambda)$ が求まれば，確率変数 X の m 次のモーメントは次の式で与えられる．

$$\langle X^m\rangle = (-i)^m \frac{d^m}{d\lambda^m}\Phi(\lambda)\bigg|_{\lambda=0}. \tag{A.3.61}$$

また，確率変数 X のキュムラント関数 $\Psi(\lambda)$ は次の式で定義される．

$$\Psi(\lambda) = 1 + \ln\Phi(\lambda). \tag{A.3.62}$$

確率変数 X の m 次のキュムラントは次の式で与えられる．

$$\langle X^m\rangle_c = (-i)^m \frac{d^m}{d\lambda^m}\Psi(\lambda)\bigg|_{\lambda=0}. \tag{A.3.63}$$

たとえば，キュムラントをモーメントを用いて表すと次のようになる．

$$\langle X\rangle_c = \langle X\rangle, \tag{A.3.64}$$

$$\langle X^2\rangle_c = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2, \tag{A.3.65}$$

$$\langle X^3\rangle_c = \langle X^3\rangle - 3\langle X\rangle\langle X^2\rangle + 2\langle X\rangle^3, \tag{A.3.66}$$

$$\langle X^4\rangle_c = \langle X^4\rangle - 4\langle X\rangle\langle X^3\rangle - 3\langle X^2\rangle^2 + 12\langle X\rangle^2\langle X^2\rangle - 6\langle X\rangle^4. \tag{A.3.67}$$

特に，2 次のキュムラントは確率変数 X の分散 $\sigma^2 = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$ に等しい．

簡単な例として，連続確率変数 X は値 x をとる確率 $P(x)$ が次のような Gauss 分布（正規分布）で与えられる場合を考えよう．

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{A.3.68}$$

確率変数 X の 4 次までのモーメントを計算すると次のようになる．

$$\langle X \rangle = a, \tag{A.3.69}$$

$$\langle X^2 \rangle = a^2 + \sigma^2, \tag{A.3.70}$$

$$\langle X^3 \rangle = a^3 + 3\sigma^2 a, \tag{A.3.71}$$

$$\langle X^4 \rangle = a^4 + 6\sigma^2 a^2 + 3\sigma^4. \tag{A.3.72}$$

これらの結果を (A.3.64)-(A.3.67) に代入すると，4 次までのキュムラントは次のようになる．

$$\langle X \rangle_c = a, \qquad \langle X^2 \rangle_c = \sigma^2, \qquad \langle X^3 \rangle_c = \langle X^4 \rangle_c = 0. \tag{A.3.73}$$

Gauss 分布に従う確率変数 X の 3 次以上のすべてのキュムラントはゼロになる．これを示すためには，確率変数 X の特性関数 $\Phi(\lambda)$ を計算すればよい．

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{i\lambda x} P(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[i\lambda x - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \exp\left(ia\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\right).\end{aligned} \tag{A.3.74}$$

したがって，Gauss 分布に従う確率変数 X のキュムラント関数 $\Psi(\lambda)$ は次の式で与えられる．

$$\Psi(\lambda) = 1 + ia\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2. \tag{A.3.75}$$

キュムラント関数 $\Psi(\lambda)$ がパラメータ λ に関して 2 次式になるので，3 次以上のすべてのキュムラントはゼロである．

以上で考えた確率変数 X は時間的に一定であった．すなわち，確率変数 X が

値 x をとる確率 $P(x)$ は時間に依存せず一定であった．そこで，確率変数 $X(t)$ が時間 t に依存する場合を考えよう．このような確率変数 $X(t)$ は**確率過程**とよばれる．1つの時刻 t に注目したとき，確率過程 $X(t)$ が値 x をとる確率 $\mathrm{Prob}[X(t)=x]$ は $P(x,t)$ と表される．また，時刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ の確率過程 $X(t)$ が値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をとる確率は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}[X(t_n)=x_n, \ldots, X(t_2)=x_2, X(t_1)=x_1]\\&\quad = P(x_n, t_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1).\end{aligned} \tag{A.3.76}$$

確率過程 $X(t)$ が時刻 $t=t_1$ において値 x_1 をとる確率を $P(x_1, t_2)$ とし，確率過程 $X(t)$ が時刻 t_1 において値 x_1 をとり，その後の時刻 t_2 において値 x_2 をとる確率を $P(x_2, t_2; x_1, t_1)$ とするとき，この確率過程 $X(t)$ が時刻 t_1 に値 x_1 をとったときに時刻 t_2 において値 x_2 をとる条件付き確率 $P(x_2, t_2|x_1, t_1)$ は次の式で与えられる．

$$P(x_2, t_2|x_1, t_1) = \frac{P(x_2, t_2; x_1, t_1)}{P(x_1, t_1)}. \tag{A.3.77}$$

このような条件付き確率は**遷移確率**ともよばれる．時刻 t_0 に確率過程 $X(t)$ が値 x_1 をとった場合に，後の時刻 $t_2, t_3, \ldots, t_n$ において確率過程 $X(t)$ が値 $x_2, x_3, \ldots,\ x_n$ をとる条件付き確率 $P(x_n, t_n; \ldots; x_3, t_3; x_2, t_2|x_1, t_1)$ は次の式で与えられる．

$$P(x_n, t_n; \ldots; x_3, t_3; x_2, t_2|x_1, t_1) = \frac{P(x_n, t_n; \ldots; x_3, t_3; x_2, t_2; x_0, t_0)}{P(x_1, t_1)} \tag{A.3.78}$$

条件付き確率（遷移確率）は確率過程の性質を議論する場合に重要な役割を果たす．

条件付き確率は確率過程 $X(t)$ が過去の時刻 t_1 で値 x_1 をとった場合にその後の時刻 t_2 において値 x_2 をとる確率を表す．言い換えれば，条件付き確率は過去の時刻における確率過程の値に関する情報から確率過程の現在の値の予測を表すと考えてよい．一方，これとは逆の予測を考えることもできる．確率過程 $X(t)$ の現在の値に関する情報からこの確率過程が過去の時刻にどのような値をとっていたかの

予測である．すなわち，確率過程 $X(t)$ が時刻 t_2 において値 x_2 をとった場合に過去の時刻 t_1 で値 x_1 をとっていた確率 $Q(x_1, t_1|x_2, t_2)$ を考えることができる．このような確率は**事後確率**とよばれる．条件付き確率と事後確率の定義から次の関係式が成り立つことは明らかである．

$$\begin{aligned} P(x_2, t_2; x_1, t_1) &= P(x_2, t_2|x_1, t_1)P(x_1, t_1) \\ &= Q(x_1, t_1|x_2, t_2)P(x_2, t_2). \end{aligned} \tag{A.3.79}$$

この関係式は **Bayes**（ベイズ）の定理とよばれ，情報理論や統計学において重要な役割を果たす．また，それぞれの確率の間に次の関係式が成り立つことは明らかである．

$$\begin{aligned} P(x_2, t_2) &= \sum_{x_1 \in \Omega_X} P(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= \sum_{x_1 \in \Omega_X} P(x_2, t_2|x_1, t_1)P(x_1, t_1), \end{aligned} \tag{A.3.80}$$

$$\begin{aligned} P(x_1, t_1) &= \sum_{x_2 \in \Omega_X} P(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= \sum_{x_2 \in \Omega_X} Q(x_1, t_1|x_2, t_2)P(x_2, t_2). \end{aligned} \tag{A.3.81}$$

確率過程 $X(t)$ の特性関数 $\Phi[z(t)]$ は次の式で定義される．

$$\Phi[z(t)] = \left\langle \exp\left[i \int_0^t dt'\, z(t')X(t') \right] \right\rangle. \tag{A.3.82}$$

ここで，初期時刻を $t = 0$ とした．また，右辺の平均値は次のような極限として定義される．

$$\begin{aligned} &\left\langle \exp\left[i \int_0^t dt'\, z(t')X(t') \right] \right\rangle \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{x_1 \in \Omega_X} \sum_{x_2 \in \Omega_X} \cdots \sum_{x_n \in \Omega_X} \\ &\quad \times P(x_n, t_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1) \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} z(t_n) x_n \Delta t_k \right]. \end{aligned} \tag{A.3.83}$$

ここで，$t > t_n > \cdots > t_2 > t_1 > t_0 = 0$ であり，$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ である．特性関数 $\Phi[z(t)]$ を用いれば，確率過程 $X(t)$ の平均値 $\langle X(t)\rangle$ や相関関数 $\langle X(t_2)X(t_1)\rangle$ は，次のように汎関数微分を用いて与えられる．

$$\begin{aligned}&\langle X(t_n)X(t_{n-1})\cdots X(t_1)\rangle\\&= (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta z(t_n)\delta z(t_{n-1})\cdots\delta z(t_1)}\Phi[z(t)]\Big|_{z(t)=0}.\end{aligned} \tag{A.3.84}$$

一般に，初期時刻から出発して時刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ に確率過程 $X(t)$ が値 x_1, $x_2, \ldots, x_n$ をとった場合に，次の時刻 t_{n+1} に確率過程 $X(t)$ が値 x_{n+1} をとる条件付き確率 $P(x_{n+1}, t_{n+1}|x_n, t_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1)$ は，この確率過程 $X(t)$ が過去の時刻にどのような値をとったかに依存する．もし，時刻 t_{n+1} に確率過程 $X(t)$ が値 x_{n+1} をとる条件付き確率が 1 つ前の時刻 t_n での確率過程 $X(t)$ の値にしか依存せず，それ以前の過去の時刻での確率過程 $X(t)$ がどのような値をとったかには依存しない場合，確率過程 $X(t)$ は Markov 過程に従うといわれる．すなわち，Markov 過程 $X(t)$ の場合には次の式が成り立つ．

$$P(x_{n+1}, t_{n+1}|x_n, t_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1) = P(x_{n+1}, t_{n+1}|x_n, t_n). \tag{A.3.85}$$

ここで，条件付き確率 $P(x, t|x', t')$ は次の規格化条件を満足する．

$$\int dx\, P(x, t|x', t') = 1. \tag{A.3.86}$$

Markov 過程の場合，確率過程 $X(t)$ が時刻 t' で値 x' をとる確率 $P(x', t')$ と後の時刻 t で確率過程 $X(t)$ が値 x をとる確率 $P(x, t)$ は条件付き確率 $P(x, t|x', t')$ を用いて次の式で関係付けられる．

$$P(x, t) = \int dx'\, P(x, t|x', t')P(x', t') \quad (t \geq t'). \tag{A.3.87}$$

この関係式をくり返して用いれば，次の式を導くことができる．

$$P(x,t) = \int dx'\, P(x,t|x',t')P(x',t')$$
$$= \int dx' \int dx''\, P(x,t|x'',t'')P(x'',t''|x',t')P(x',t'). \qquad \text{(A.3.88)}$$

ここで，$t \geq t'' \geq t'$ である．この関係式は任意の確率 $P(x',t')$ に対して成り立つので，条件付き確率 $P(x,t|x',t')$ は次の関係式を満足しなければならない．

$$P(x,t|x',t') = \int dx''\, P(x,t|x'',t'')P(x'',t''|x',t') \quad (t \geq t'' \geq t'). \qquad \text{(A.3.89)}$$

これは確率過程 $X(t)$ が Markov 過程であるための条件の別表現である．

次に，確率過程 $X(t)$ が Markov 過程に従う場合，確率 $P(x,t)$ の時間発展がどのように決定されるかを考えよう．そこで，条件付き確率 $P(x',t+\Delta t|x,t)$ を微小時間 Δt に対して次のように展開する．

$$P(x,t+\Delta t|x',t) = [1-\gamma(x')\Delta t]\delta(x'-x) + \gamma(x,x')\Delta t + \cdots \qquad \text{(A.3.90)}$$

ここで，"$\cdots$" は微小時間 Δt の高次の項であり，以下の議論では無視することができる．規格化条件からパラメータ $\gamma(x')$ と $\gamma(x',x)$ は次の関係式を満足しなければならない．

$$\gamma(x') = \int dx\, \gamma(x,x'). \qquad \text{(A.3.91)}$$

このとき，(A.3.89) と (A.3.90) を用いれば次の式を導くことができる．

$$P(x,t+\Delta t|x',t')$$
$$= \int dx''\, P(x,t+\Delta t|x'',t)P(x'',t|x',t')$$
$$= \int dx''\, [(1-\gamma(x'')\delta t)\delta(x-x'') + \gamma(x,x'')\Delta]P(x'',t|x',t')$$
$$= P(x,t|x',t') - \gamma(x)P(x,t|x',t')\Delta t + \int dx''\, \gamma(x,x'')P(x'',t|x',t')\Delta t.$$
$$\text{(A.3.92)}$$

この式において極限 Δt をとれば，次の微分方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t|x',t') = -\gamma(x)P(x,t|x',t') + \int dx''\,\gamma(x,x'')P(x'',t|x',t'). \tag{A.3.93}$$

ここで，初期条件は $P(x,t|x',t) = \delta(x-x')$ である．したがって，確率 $P(x,t)$ は次の微分方程式を満足する．

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\gamma(x)P(x,t) + \int dx'\,\gamma(x,x')P(x',t). \tag{A.3.94}$$

Markov 過程 $X(t)$ に対する確率 $P(x,t)$ の時間発展を決定する微分方程式は **Chapman-Kolmogorov**（チャップマン・コルモゴロフ）方程式とよばれる．

A.3.2　Gauss 過程

確率過程 $X(t)$ が Gauss 過程であるとは，確率過程 $X(t)$ が時刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ において値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をとる確率 $P(t_n, x_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1)$ が次のような Gauss 分布で与えられることである．

$$P(t_n, x_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1) = C\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x_j - m_j)(x_k - m_k)\right]. \tag{A.3.95}$$

ここで，C は確率 $P(t_n, x_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1)$ の規格化定数であり，パラメータ m_k は時刻 t_k で確率過程 $X(t)$ がとり得る値 x_k の平均値である．

$$m_k = \langle x_k \rangle = \langle X(t_k) \rangle. \tag{A.3.96}$$

また，行列 A を確率過程 $X(t)$ の共分散行列とする．すなわち，行列要素 A_{jk} は次の式で与えられる．

$$\mathsf{A}_{jk} = \langle (x_j - m_j)(x_k - m_k) \rangle$$
$$= \langle [x(t_j) - \langle x(t_j) \rangle][x(t_k) - \langle x(t_k) \rangle] \rangle$$
$$= \langle x(t_j)x(t_k) \rangle - \langle x(t_j) \rangle \langle x(t_k) \rangle. \tag{A.3.97}$$

さらに，実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{m}$ を次の式で定義する．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}. \tag{A.3.98}$$

共分散行列 A と実ベクトル $\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{m}$ を用いれば，(A.3.95) で与えられる確率 $P(t_n, x_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1)$ は次のように表すことができる．

$$P(t_n, x_n; \ldots; x_2, t_2; x_1, t_1) = C \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})^{\mathrm{T}} \mathsf{A}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}) \right]. \tag{A.3.99}$$

ここで，記号 T は行列，またはベクトルの転置を表す．確率の規格化条件は次の式で与えられる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 W_n(t_n, x_n; \cdots; x_2, t_2; x_1, t_1) = 1. \tag{A.3.100}$$

Gauss 積分を実行して規格化定数 C を求めると，次の結果が得られる．

$$C = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathsf{A}}}. \tag{A.3.101}$$

次に，Gauss 過程 $X(t)$ の特性関数を求める．特性関数 $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ は次の式で定義される．

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \int \cdots \iint d^n \boldsymbol{x}\, W_n(t_n, x_n; \cdots; x_2, t_2; x_1, t_1) \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathsf{A}}} \int \cdots \iint d^n \boldsymbol{x} \, \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}} \mathsf{A}^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}) + i\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}\right]. \tag{A.3.102}$$

ここで，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ である．右辺の Gauss 積分は次のようにして実行することができる．まず，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{m} + \boldsymbol{a}$ とおいて，積分変数を $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ に変換する．

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathsf{A}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \mathsf{A}^{-1} \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m} + i\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}\right)$$
$$\times \int \cdots \iint d^n \boldsymbol{y} \, \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \mathsf{A}^{-1} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \mathsf{A}^{-1} \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\xi}\right). \tag{A.3.103}$$

ここで，等号 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ が成り立つことを用いた．また，パラメータ $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = i\mathsf{A}\boldsymbol{\xi}$ とおくと被積分関数の指数部分の変数 $\boldsymbol{y}$ の線形項が消えて次のようになる．

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathsf{A}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}\right)$$
$$\times \int \cdots \iint d^n \boldsymbol{y} \, \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \mathsf{A}^{-1} \boldsymbol{y}\right). \tag{A.3.104}$$

したがって，Gauss 積分を実行すれば特性関数 $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ が得られる．

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \mathsf{A} \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle (x_j - m_j)(x_k - m_k)\rangle \xi_j \xi_k + i\sum_{k=1}^{n} m_k \xi_k\right) \tag{A.3.105}$$

特性関数 $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ が求められれば，任意のモーメントは次の式から計算することができる．

$$\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \rangle = \frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{\partial(i\xi_1)^{m_1}\partial(i\xi_2)^{m_2}\cdots\partial(i\xi_n)^{m_n}} \Phi(\boldsymbol{\xi})\bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}}. \tag{A.3.106}$$

一方，Gauss 過程 $X(t)$ のキュムラント関数 $\Psi(\boldsymbol{\xi})$ は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\xi}) &= \ln\Phi(\boldsymbol{\xi}) = i\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{\xi} \\ &= i\sum_{k=1}^{n} m_k\xi_k - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle (x_j - m_j)(x_k - m_k)\rangle \xi_j\xi_k \end{aligned} \tag{A.3.107}$$

任意のキュムラントは次の式から計算することができる．

$$\langle z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n} \rangle_c = \frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{\partial(i\xi_1)^{m_1}\partial(i\xi_2)^{m_2}\cdots\partial(i\xi_n)^{m_n}} \Psi(\boldsymbol{\xi})\bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}}. \tag{A.3.108}$$

この結果から明らかなように，Gauss 過程 $X(t)$ の 3 次以上のキュムラントはすべてゼロになる．2 次のキュムラントは確率変数 $x(t)$ の相関関数 $\phi(t_j, t_k)$ に他ならない．

$$\begin{aligned}\langle x_j x_k \rangle_c &= \langle x_j x_k \rangle - \langle x_j \rangle \langle x_k \rangle \\ &= \langle x(t_j) x(t_k) \rangle - \langle x(t_j) \rangle \langle x(t_k) \rangle \\ &= \langle [x(t_j) - \langle x(t_j) \rangle][x(t_k) - \langle x(t_k) \rangle] \rangle \\ &= \phi(t_j, t_k). \end{aligned} \tag{A.3.109}$$

特性関数 $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ を相関関数 $\phi(t_j, t_k)$ を用いて表せば次のようになる．

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\phi(t_j, t_k)\xi_j\xi_k + i\sum_{k=1}^{n} m(t_k)\xi_k \right). \tag{A.3.110}$$

ここで，$m(t) = \langle x(t) \rangle$ である．特に，$m(t) = 0$ の場合には次の式が成り立つ．

$$\langle x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)\rangle$$
$$=\phi(t_1,t_2)\phi(t_3,t_4)+\phi(t_1,t_3)\phi(t_2,t_4)+\phi(t_1,t_4)\phi(t_2,t_3). \qquad \text{(A.3.111)}$$

以上では，離散的な時刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ での特性関数を考えたが，連続的な時間 t に関する特性関数も考えることができる．そこで，時刻 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ に対して，微小時間間隔 $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ を定義する．このとき，特性関数に現れるパラメータ ξ_k を $\xi(t_k)\Delta t_k$ で置き換えれば，次の関係式が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_k)x(t_k)\Delta t_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t} dt'\, \xi(t')x(t'). \qquad \text{(A.3.112)}$$

このことから連続的な時間 t に対する特性関数 $\Phi[\xi(t)]$ は次のように定義することができる．

$$\Phi[\xi(t)] = \left\langle \exp\left[i \int_{t_0}^{t} dt'\, \xi(t')x(t') \right] \right\rangle. \qquad \text{(A.3.113)}$$

このとき，(A.3.110) から Gauss 過程の特性関数の具体的な形は次のようになることが理解できる．

$$\Phi[\xi(t)] = \exp\left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, \phi(t_1,t_2)\xi(t_1)\xi(t_2) + i \int_{t_0}^{t} dt'\, \xi(t')m(t') \right]. \qquad \text{(A.3.114)}$$

この式において，$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \delta(t-t_k)$ とおけば，離散的な場合の結果が得られる．また，定常 Gauss 過程の場合には，平均値 $m(t)$ は時間 t によらず一定であり，相関関数 $\phi(t_1,t_2)$ は時間の差の関数 $\phi(t_1-t_2)$ である．また，定常過程の場合，平均値 $m(t)$ は一定値なのでこれをゼロとおいても一般性を失うことはない．したがって，定常 Gauss 過程の特性関数は次の式で与えられる．

$$\Phi[\xi(t)] = \exp\left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, \phi(t_1-t_2)\xi(t_1)\xi(t_2) \right]. \qquad \text{(A.3.115)}$$

A.3.3 Doob の定理の証明

確率過程 $\{x(t)\in\mathbb{R}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ が条件 $\langle x(t)\rangle=0$ を満足する定常 Gauss-Markov 過程の場合，自己相関関数 $\langle x(t_2)x(t_1)\rangle$ が次の式で与えられることを示す（Doob の定理）.

$$\langle x(t_2)x(t_1)\rangle=\langle x^2\rangle \mathrm{e}^{-\gamma|t_2-t_1|}. \tag{A.3.116}$$

ここで，γ は正の定数である．また，定常過程の性質から $\langle x^2(t_1)\rangle=\langle x^2(t_2)\rangle\equiv\langle x^2\rangle$ が成り立つ．まず，確率過程 $\{x(t)\in\mathbb{R}\,|\,t\in\mathbb{R}\}$ が Gauss 過程であることから，任意の実パラメータ a_1 と a_2 に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\left\langle \mathrm{e}^{ia_1x(t_1)+ia_2x(t_2)}\right\rangle\\&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle[a_1x(t_1)+a_2x(t_2)]^2\rangle\right\}\\&=\exp\left\{-\frac{1}{2}a_2^2\langle x^2\rangle-\frac{1}{2}a_1^2\langle x^2\rangle-a_1a_2\langle x(t_1)x(t_2)\rangle\right\}.\end{aligned} \tag{A.3.117}$$

定常過程の性質から $\langle x(t_2)x(t_1)\rangle$ は時刻 t_2 と t_1 の差の関数になるので，次のように表すことにする.

$$\frac{\langle x(t_2)x(t_1)\rangle}{\langle x^2\rangle}=R(t_2-t_1). \tag{A.3.118}$$

したがって，次の式が成り立つことがわかる.

$$\left\langle \mathrm{e}^{ia_1x(t_1)+ia_2x(t_2)}\right\rangle=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle x^2\rangle\left[a_2^2+a_1^2+2a_1a_2R(t_2-t_1)\right]\right\}. \tag{A.3.119}$$

ここで，確率変数 $x(t)$ が時刻 t_1 で値 x_1 ととった場合に，時刻 t_2 で値 x_2 をとる条件付き確率を $P(x_2,t_2|x_1,t_1)$ と表し，関数 $Q_{21}(a_2,x_1)$ を次の式で定義する.

$$Q_{21}(a_2,x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\,\mathrm{e}^{ia_2x_2}P(x_2,t_2|x_1,t_1). \tag{A.3.120}$$

また，確率変数 $x(t)$ が時刻 t_1 で値 x_1 をとり，その後の時刻 t_2 で値 x_2 をとる結合確率は $W(x_2,t_2;x_1,t_1)=P(x_2,t_2|x_1,t_1)W(x_1)$ で与えられる．ここで，確率

変数 $x(t)$ が時刻 t_1 で値 x_1 をとる確率 $W(x_1)$ は，定常過程の場合には時刻 t_1 には依存しないことを考慮した．このとき，平均値 $\left\langle \mathrm{e}^{ia_1 x(t_1)+ia_2 x(t_2)} \right\rangle$ は次のように計算することができる．

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{e}^{ia_1 x(t_1)+ia_2 x(t_2)} \right\rangle \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, \mathrm{e}^{ia_2 x_2 + ia_1 x_1} P(x_2, t_2 | x_1, t_1) W(x_1) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, \mathrm{e}^{ia_1 x_1} Q_{21}(a_2, x_1) W(x_1). \qquad \text{(A.3.121)}
\end{aligned}$$

この式の右辺は関数 $Q_{21}(a_2, x_1)W(x_1)$ の x_1 に関する Fourier 変換を表しているので，逆変換を行うことによって次の式が得られる．

$$Q_{21}(a_2, x_1) W(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \, \mathrm{e}^{-ia_1 x_1} \left\langle \mathrm{e}^{ia_1 x(t_1)+ia_2 x(t_2)} \right\rangle . \qquad \text{(A.3.122)}$$

ここで，確率過程が Gauss 過程であることを考慮すれば，確率分布 $W(x)$ は次の式で与えられる．

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle x^2 \rangle}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle}} . \qquad \text{(A.3.123)}$$

したがって，関数 $Q_{21}(a_2, x_1)$ は次のようになる．

$$Q_{21}(a_2, x_1) = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{2\pi}} \, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle}} \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \, \mathrm{e}^{-ia_1 x_1} \left\langle \mathrm{e}^{ia_1 x(t_1)+ia_2 x(t_2)} \right\rangle . \qquad \text{(A.3.124)}$$

この式の右辺に (A.3.119) を代入し，Gauss 積分を実行すれば次の結果が得られる．

$$Q_{21}(a_2, x_1) = \exp\left\{ ia_2 x_1 R(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} a_2^2 \langle x^2 \rangle \left[1 - R^2(t_2 - t_1) \right] \right\} . \qquad \text{(A.3.125)}$$

次に，確率過程 $\{x(t) \in \mathbb{R} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ が Markov 過程であることを用いる．Markov 過程の場合には条件付き確率 $P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ は次の関係式を満足する．

$$P(x_3,t_3|x_1,t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}dx_2P(x_3,t_3|x_2,t_2)P(x_2,t_2|x_1,t_1). \tag{A.3.126}$$

ここで，$t_3\geq t_2\geq t_1$ である．この関係式と関数 $Q_{21}(a_2,x_1)$ の定義 (A.3.120) から次の式を導くことができる．

$$\begin{aligned}
Q_{31}(a_3,x_1)&=\int_{-\infty}^{\infty}dx_3\,\mathrm{e}^{ia_3x_3}P(x_3,t_3|x_1,t_1)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}dx_3\,\mathrm{e}^{ia_3x_3}\int_{-\infty}^{\infty}dx_2P(x_3,t_3|x_2,t_2)P(x_2,t_2|x_1,t_1)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\,Q_{32}(a_3,x_2)P(x_2,t_2|x_1,t_1)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\int_{-\infty}^{\infty}dx_2'\,\delta(x_2-x_2')Q_{32}(a_3,x_2)P(x_2',t_2|x_1,t_1)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx_2\int_{-\infty}^{\infty}da_2\,\mathrm{e}^{-ia_2x_2}Q_{32}(a_3,x_2)Q_{21}(a_2,x_1).
\end{aligned} \tag{A.3.127}$$

ここで，関数 $Q_{jk}(a_j,x_k)$ が (A.3.125) で与えられることを用いて，この式の両辺を具体的に表せば次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{ia_3x_1R(t_3-t_1)-\frac{1}{2}a_3^2\langle x^2\rangle\left[1-R^2(t_3-t_1)\right]}\\
&=\mathrm{e}^{ia_3x_1R(t_3-t_2)R(t_2-t_1)-\frac{1}{2}a_3^2\langle x^2\rangle\left[1-R^2(t_3-t_2)R(t_2-t_1)\right]}.
\end{aligned} \tag{A.3.128}$$

この関係式が任意の実パラメータ x_1 と a_3 に対して成り立たなければならないので，関数 $R(t_j-t_k)$ が次の関係式を満足することがわかる．

$$R(t_3-t_2)R(t_2-t_1)=R(t_3-t_1)\qquad(t_3\geq t_2\geq t_1). \tag{A.3.129}$$

あるいは，$x=t_2-t_1$，および $y=t_3-t_2$ とおけば，この式は次のように表すことができる．

$$R(x)R(y)=R(x+y)\qquad(x\geq 0,\ y\geq 0). \tag{A.3.130}$$

また，定義 (A.3.118) から明らかなように関数 $R(x)$ は実関数である．したがっ

て，関数 $R(x)$ は非負の実数 x に対して次の式が成り立つ．

$$R(x) = a^x \qquad (x \geq 0). \tag{A.3.131}$$

また，$a = \mathrm{e}^c$ とおくと，関数 $R(x)$ は次の形に表すことができる．

$$R(x) = \mathrm{e}^{cx} \qquad (x \geq 0). \tag{A.3.132}$$

パラメータ c に対する条件を求めるために，関数 $R(x)$ の定義 (A.3.118) に (A.3.132) を代入すると次のようになる．

$$\frac{\langle x(t_2)x(t_1)\rangle}{\langle x^2\rangle} = \mathrm{e}^{c(t_2-t_1)} \qquad (t_2 \geq t_1). \tag{A.3.133}$$

相関関数 $\langle x(t_2)x(t_1)\rangle$ は時間間隔 $t_2 - t_1 \geq 0$ が大きくなるとともに減衰するので，パラメータ c は負の値をとらなければならない．したがって，正のパラメータ $\gamma\,(=-c)$ を用いて次のように表すことができる．

$$\frac{\langle x(t_2)x(t_1)\rangle}{\langle x^2\rangle} = \mathrm{e}^{-\gamma(t_2-t_1)} \qquad (t_2 \geq t_1). \tag{A.3.134}$$

一方，$t_1 \geq t_2$ の場合には，確率変数 $x(t_1)$ と $x(t_2)$ は可換なので，t_1 と t_2 の役割を入れ替えて考えれば，$\langle x(t_2)x(t_1)\rangle/\langle x^2\rangle = \mathrm{e}^{-\gamma(t_1-t_2)}$ $(t_1 \geq t_2)$ を導くことができる．以上の結果から，Doob の定理 (A.3.116) の成り立つことが示された．

次に，多変数の定常 Gauss-Markov 過程 $\{\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^N \mid t \in \mathbb{R}, \langle x_k(t)\rangle = 0\}$ の場合の Doob の定理を導く．まず，定常 Gauss 過程の性質から任意の N 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して次の式が成り立つ*1．

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}(t_1))+i(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}(t_2))}\right\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left\langle[(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}(t_1))+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}(t_2))]^2\right\rangle} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a},\mathsf{D}\boldsymbol{a})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b},\mathsf{D}\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a},\mathsf{C}^{21}\boldsymbol{b})}.\end{aligned} \tag{A.3.135}$$

ここで，共分散行列 D と $N \times N$ 実行列 C^{21} の行列要素は次の式で与えられる．

*1　以下では，実ベクトルの内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$ と表すことにする．

$$\mathsf{D}_{jk} = \langle x_j(t) x_k(t) \rangle \equiv \langle x_j x_k \rangle, \tag{A.3.136}$$

$$\mathsf{C}^{21}_{jk} = \langle x_j(t_2) x_k(t_1) \rangle. \tag{A.3.137}$$

行列 D と C^{21} は次の性質を満足する.

$$(\boldsymbol{a}, \mathsf{D}\boldsymbol{b}) = (\mathsf{D}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \qquad (\mathsf{D}^{\mathrm{T}} = \mathsf{D}), \tag{A.3.138}$$

$$(\boldsymbol{a}, \mathsf{C}^{21}\boldsymbol{b}) = (\mathsf{C}^{12}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \qquad ((\mathsf{C}^{21})^{\mathrm{T}} = \mathsf{C}^{12}). \tag{A.3.139}$$

また，1 変数の場合と同様に，関数 $Q_{21}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ を次の式で定義する.

$$Q_{21}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^N x' \, \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}')} P(\boldsymbol{x}', t_2 | \boldsymbol{x}, t_1). \tag{A.3.140}$$

ここで，$P(\boldsymbol{x}_2, t_2 | \boldsymbol{x}_1, t_1)$ は $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$ であった場合に $\boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{x}_2$ となる条件付き確率である．このとき，平均値 $\left\langle \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(t_1)) + i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}(t_2))} \right\rangle$ の Fourier 変換を計算することによって次の式が得られる.

$$(2\pi)^N Q_{21}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) W(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^N a \, \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})} \left\langle \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(t_1)) + i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}(t_2))} \right\rangle. \tag{A.3.141}$$

また，平均値がゼロであるような N 変数の Gauss 分布 $W(\boldsymbol{x})$ は一般に次の式で与えられる.

$$W(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathsf{D}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, \mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x})}. \tag{A.3.142}$$

したがって，(A.3.135) と (A.3.142) を (A.3.141) に代入すれば，関数 $Q_{21}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} Q_{21}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) &= \sqrt{\frac{\det \mathsf{D}}{(2\pi)^N}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, \mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x})} \int_{-\infty}^{\infty} d^N a \, \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})} \left\langle \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(t_1)) + i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}(t_2))} \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\det \mathsf{D}}{(2\pi)^N}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}, \mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}, \mathsf{D}\boldsymbol{b})} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d^N a \, \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}, \mathsf{D}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{b}, \mathsf{C}^{21}\boldsymbol{a})}. \end{aligned} \tag{A.3.143}$$

右辺の積分は変数変換 $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{12}\boldsymbol{b} + i\mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x}$ を行って指数関数部の積分変数の 1 次の項を消去することによって実行することができる．その結果，定常 Gauss 過程の場合には関数 $Q_{21}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})$ は次の式で与えられる．

$$Q_{21}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b},\mathsf{D}\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b},\mathsf{C}^{21}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{12}\boldsymbol{b})+i(\boldsymbol{b},\mathsf{C}^{21}\mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x})}. \tag{A.3.144}$$

ここで，関係式 (A.3.138) と (A.3.139) が成り立つことを用いた．一方，確率過程 $\{\boldsymbol{x}(t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$ が Markov 過程であることから次の式を導くことができる．

$$\begin{aligned} &Q_{31}(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{x}_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^N x_3\, \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{x}_3)} P(\boldsymbol{x}_3, t_3|\boldsymbol{x}_1, t_1) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{-\infty}^{\infty} d^N a_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^N x_2\, \mathrm{e}^{-i(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{x}_2)} Q_{32}(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{x}_2) Q_{21}(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}_1) \end{aligned} \tag{A.3.145}$$

ここで，$t_3 \geq t_2 \geq t_1$ である．(A.3.145) の両辺に (A.3.144) を代入して (A.3.138) と (A.3.139) を用いれば，(A.3.145) の左辺と右辺はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}\boldsymbol{a}_3)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{C}^{31}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{13}\boldsymbol{a}_3)+i(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{C}^{31}\mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x}_1)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}\boldsymbol{a}_3)+\frac{1}{2}(\mathsf{C}^{13}\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{13}\boldsymbol{a}_3)+i(\mathsf{C}^{13}\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x}_1)}, \end{aligned} \tag{A.3.146}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}\boldsymbol{a}_3)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{C}^{32}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{21}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{12}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{23}\boldsymbol{a}_3)+i(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{C}^{32}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{21}\mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x}_1)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}\boldsymbol{a}_3)+\frac{1}{2}(\mathsf{C}^{12}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{23}\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{12}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{23}\boldsymbol{a}_3)+i(\mathsf{C}^{12}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{23}\boldsymbol{a}_3,\mathsf{D}^{-1}\boldsymbol{x}_1)}. \end{aligned} \tag{A.3.147}$$

左辺と右辺が任意の実ベクトル $\boldsymbol{a}_3$ と $\boldsymbol{x}_1$ に対して等しくなければならないことから，次の式を導くことができる．

$$\mathsf{C}^{13} = \mathsf{C}^{12}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{23}. \tag{A.3.148}$$

あるいは，両辺を行列要素で表せば次のようになる．

$$\langle x_j(t_1)x_k(t_3)\rangle = \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle x_j(t_1)x_l(t_2)\rangle(\mathsf{D}^{-1})_{lm}\langle x_m(t_2)x_k(t_3)\rangle. \quad \text{(A.3.149)}$$

ここで，行列の対称性 $(\mathsf{D}^{-1})_{jk} = (\mathsf{D}^{-1})_{kj}$ を用いれば，この式は次のように書き換えることができる．

$$\langle x_k(t_3)x_j(t_1)\rangle = \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle x_k(t_3)x_m(t_2)\rangle(\mathsf{D}^{-1})_{ml}\langle x_l(t_2)x_j(t_1)\rangle. \quad \text{(A.3.150)}$$

この結果を行列で表現すれば次のようになる．

$$\mathsf{C}^{31} = \mathsf{C}^{32}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{C}^{21}. \quad \text{(A.3.151)}$$

また，$\mathsf{C}^{jk} = \tilde{\mathsf{C}}^{jk}\mathsf{D}$ とおけば，行列 C^{jk} は次の関係式を満足する．

$$\tilde{\mathsf{C}}^{31} = \tilde{\mathsf{C}}^{32}\tilde{\mathsf{C}}^{21}. \quad \text{(A.3.152)}$$

ここで，確率過程の定常性を考慮すれば，行列 $\tilde{\mathsf{C}}^{jk}$ は時間の差 $t_j - t_k$ の関数になるので，$\tilde{\mathsf{C}}^{jk} = \mathsf{R}(t_j - t_k)$ とおくことができる．このとき，行列 $\mathsf{R}(t_j - t_k)$ に対しては次の関係式が成り立つ．

$$\mathsf{R}(t_3 - t_1) = \mathsf{R}(t_3 - t_2)\mathsf{R}(t_2 - t_1) \qquad (t_3 \geq t_2 \geq t_1). \quad \text{(A.3.153)}$$

この結果は 1 変数の定常 Gauss-Markov 過程の場合の (A.3.129) に対応する．したがって，同様の議論によって次の式を導くことができる．

$$\mathsf{R}(t_2 - t_1) = \mathrm{e}^{-\mathsf{M}(t_2 - t_1)} \qquad (t_2 \geq t_1). \quad \text{(A.3.154)}$$

ここで，M は固有値が正の $N \times N$ 行列である．このとき，行列 C^{21} は次のようになる．

$$\mathsf{C}^{21} = \mathrm{e}^{-\mathsf{M}(t_2-t_1)}\mathsf{D}. \tag{A.3.155}$$

あるいは，行列要素で表せば次のようになる．

$$\langle x_j(t_2)x_k(t_1)\rangle = \sum_{l=1}^{N}\left(\mathrm{e}^{-\mathsf{M}(t_2-t_1)}\right)_{jl}\langle x_l x_k\rangle \qquad (t_2 \geq t_1). \tag{A.3.156}$$

一方，$t_1 \geq t_2$ の場合には次のように扱えばよい．

$$\begin{aligned}\langle x_j(t_2)x_k(t_1)\rangle &= \langle x_k(t_1)x_j(t_2)\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{N}\left(\mathrm{e}^{-\mathsf{M}(t_2-t_1)}\right)_{kl}\langle x_l x_j\rangle \qquad (t_1 \geq t_2).\end{aligned} \tag{A.3.157}$$

したがって，多変数定常 Gauss-Markov 過程の Doob の定理は (A.3.156) と (A.3.157) で与えられる．

A.4 Liouville-von Neumann 方程式の超演算子

Liouville-von Neumann 方程式の超演算子

$$iL \bullet = i[H,\ \bullet\ ] \tag{A.4.158}$$

の性質を調べてみよう．被演算子 X に作用する超演算子 $A(t_2, t_1)$ を

$$A(t_2,t_1)X = \mathrm{e}^{iLt_2}A\mathrm{e}^{-iLt_1}X \tag{A.4.159}$$

にて定義する．

$\mathrm{e}^{-iLt_1}X$ の部分を t_1 に関して微分すると

$$\frac{d}{dt_1}\mathrm{e}^{-iLt_1}X = -iL\mathrm{e}^{-iLt_1}X = -i[H,\ \mathrm{e}^{-iLt_1}X] \tag{A.4.160}$$

となる．これを積分して

$$\mathrm{e}^{-iLt_1}X = \mathrm{e}^{-iHt_1}X\mathrm{e}^{iHt_1} = X(-t_1) \tag{A.4.161}$$

が得られる．$A(t_2, t_1)X$ を t_2 で微分して同様に扱うと，

$$A(t_2, t_1)X = \mathrm{e}^{iHt_2}A\mathrm{e}^{-iHt_1}X\mathrm{e}^{iH(t_1-t_2)} = A(t_2)X(t_2 - t_1) \tag{A.4.162}$$

を得る．ただし，

$$Y(t) = \mathrm{e}^{iHt}Y\mathrm{e}^{-iHt} \tag{A.4.163}$$

は，Heisenberg 演算子である．

(A.4.162) で $t_1 = t_2 = t$ とおくと，

$$A(t,t)X = A(t)X, \tag{A.4.164}$$

すなわち，被演算子 X に作用する超演算子として，

$$\mathrm{e}^{iLt}A\mathrm{e}^{-iLt}X = \mathrm{e}^{iHt}A\mathrm{e}^{-iHt}X \tag{A.4.165}$$

が得られる．これより，超演算子 e^{-iLt} の X への作用は，左端にある超演算子 e^{iLt} の作用により打ち消されることがわかる．したがって，

$$A(t,t) = \mathrm{e}^{iLt}A\mathrm{e}^{-iLt} \tag{A.4.166}$$

にある超演算子 e^{iLt} の作用は演算子（あるいは，超演算子）A への作用のみとなる．この解釈は，超演算子 L が Liouville - von Neumann 方程式の超演算子 (A.4.158) でない一般の場合にも適用できる．

A.5 熱空間における規格直交完全系

状態

$$|m, \tilde{n}) = |m) \otimes |\tilde{n}) \tag{A.5.167}$$

の集合を考える [125]．ただし，$|m)$ と $|\tilde{n})$ は，規格直交性

$$(m|m') = \delta_{mm'}, \qquad (\tilde{n}|\tilde{n}') = \delta_{nn'} \tag{A.5.168}$$

と完全性

$$\sum_m |m)(m| = 1, \qquad \sum_n |\tilde{n})(\tilde{n}| = 1 \tag{A.5.169}$$

を満たしているものとする．これより，状態 $|m, \tilde{n})$ の規格直交性と完全性は，それぞれ，

$$(m, \tilde{n}|m', \tilde{n}') = \delta_{mm'}\delta_{nn'}, \tag{A.5.170}$$

$$\sum_{m,n} |m, \tilde{n})(m, \tilde{n}| = 1 \tag{A.5.171}$$

で与えられる．

非チルダ演算子のみで構成されている演算子 A の行列要素 $(k, \tilde{\ell}|A|m, \tilde{n})$ と $(k, \tilde{\ell}|\tilde{A}|m, \tilde{n})$ は，それぞれ，

$$(k, \tilde{\ell}|A|m, \tilde{n}) = (k|A|m)\ (\tilde{\ell}|\tilde{n}) = (k|A|m)\delta_{\ell n}, \tag{A.5.172}$$

$$\begin{aligned}(k, \tilde{\ell}|\tilde{A}|m, \tilde{n}) &= \Big\{(\ell, \tilde{k}|A|n, \tilde{m})\Big\}^{\sim} = \Big\{(\ell|A|n)\ (\tilde{k}|\tilde{m})\Big\}^{\sim} = (\ell|A|n)^{\sim}\delta_{km} \\ &= (\ell|A|n)^{*}\delta_{km} = (n|A^{\dagger}|\ell)\delta_{km}\end{aligned} \tag{A.5.173}$$

となる．変形の際，

$$|m, \tilde{n})^{\sim} = |n, \tilde{m}) \tag{A.5.174}$$

なる性質を利用した．

この基底を用いて，熱真空を

$$|0(t)\rangle = \sum_{n,m} P_{n,m}(t)|n, \tilde{m}), \tag{A.5.175}$$

$$\langle 1| = \sum_{n} (n, \tilde{n}| \tag{A.5.176}$$

と展開する．内積 $\langle 1|0(t)\rangle$ の規格化は，

$$1 = \langle 1|0(t)\rangle = \sum_{k}\sum_{n,m} P_{n,m}(t)(k, \tilde{k}|n, \tilde{m}) = \sum_{k} P_{k,k}(t) \tag{A.5.177}$$

となる．最後の等号で，規格直交性 (A.5.170) を用いた．

(A.5.174) を利用すると，熱真空 $|0(t)\rangle$ のチルダ不変性より，行列 $P_{n,m}(t)$ のエルミート性

$$P^*_{m,n}(t) = P_{n,m}(t) \tag{A.5.178}$$

が得られる．その証明は，

$$\begin{aligned} |0(t)\rangle^{\sim} &= \sum_{n,m} P^*_{n,m}(t)|n, \tilde{m})^{\sim} = \sum_{n,m} P^*_{n,m}(t)|m, \tilde{n}) \\ &= \sum_{m,n} P^*_{m,n}(t)|n, \tilde{m}) = |0(t)\rangle = \sum_{m,n} P_{n,m}(t)|n, \tilde{m}) \end{aligned} \tag{A.5.179}$$

で与えられる．これより，$P_{n,n}(t)$ が実数であることが導かれる．

確率としての解釈より，$P_{n,n}(t)$ はゼロまたは正の実数で

$$0 \leq P_{n,n}(t) \leq 1 \tag{A.5.180}$$

を満たす必要がある．この条件は，NETFD の言葉では，

$$0 \leq (n, n|0(t)\rangle \leq 1 \tag{A.5.181}$$

と表せる．また，確率の規格化は，

$$\sum_n (n,n|0(t)\rangle = \sum_n P_{n,n}(t) = 1 \qquad \text{(A.5.182)}$$

となる．

A.6 古典確率微分方程式の体系

ここで古典系の確率微分方程式の体系を振り返ってみよう．そのために Langevin 方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma u(t) + \frac{1}{m} R(t) \qquad \text{(A.6.183)}$$

で記述される系を考察することにしよう．ただし，乱雑力 $R(t)$ は

$$\Big\langle R(t) \Big\rangle = 0, \qquad \Big\langle R(t_1)R(t_2) \Big\rangle = 2m\gamma T\delta(t_1 - t_2) \qquad \text{(A.6.184)}$$

で規定される．T は環境系の温度である．ここでの平均 $\langle \cdots \rangle$ は，定常確率過程 $R(t)$ に関する乱雑平均を意味する．なお，準巨視系を記述する Langevin 方程式 (A.6.183) の乱雑平均をとると，現象論的な巨視的方程式

$$\frac{d\langle u(t)\rangle}{dt} = -\gamma \langle u(t)\rangle \qquad \text{(A.6.185)}$$

を得る．

同じ系を記述する確率 Liouville 方程式は，初期条件 $f(u,0) = P(u,0)$ の下に，

$$\frac{\partial}{\partial t} f(u,t) = \Omega(u,t) f(u,t), \qquad \Omega(u,t) = -\frac{\partial}{\partial u}\dot{u} \qquad \text{(A.6.186)}$$

で与えられる [126, 127]．$\dot{u}$ は，Langevin 方程式 (A.6.183) と同じ構造をもつ

$$\dot{u} = -\gamma u + \frac{1}{m} R(t) \qquad \text{(A.6.187)}$$

にて定義される速度空間での「流れ」である．

ところで，確率過程 $u(t)$ の時間導関数

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \tag{A.6.188}$$

は収束しないので，方程式 (A.6.183) や (A.6.186) は意味を成さない．Langevin 方程式 (A.6.183) は Stratonovich 型の確率微分方程式 [128]

$$du(t) = -\gamma u(t)dt + \frac{1}{m}dB(t) \tag{A.6.189}$$

と記されるべきものである．ただし，$dB(t)$ は

$$dB(t) = R(t)dt \tag{A.6.190}$$

により「定義される」Brown 運動であり＊2,

$$\left\langle dB(t) \right\rangle = 0, \qquad \left\langle dB(t)dB(t) \right\rangle = 2m\gamma T dt \tag{A.6.191}$$

を満たす．(A.6.191) の第 2 式は，第 2 種揺動散逸定理とよばれる．関連して，確率 Liouville 方程式 (A.6.186) は

$$df(u,t) = \Omega(u,t)dt \circ f(u,t) \tag{A.6.192}$$

となる．ただし，

$$\Omega(u,t)dt = -\frac{\partial}{\partial u}du, \quad du = -\gamma u dt + \frac{1}{m}dB(t) \tag{A.6.193}$$

である．記号 $\circ$ は

$$dX(t) \circ Y(t) = [X(t+dt) - X(t)]\,\frac{Y(t+dt) + Y(t)}{2} \tag{A.6.194}$$

で定義される Stratonovich 型確率積である（量子確率演算子に対する確率積については，付録 A.7 節参照）．

＊2　Brown 運動 $B(t)$ は，t で微分できないので，実は $R(t)$ は存在しない．

揺動的確率密度関数（stochastic probability density function）$f(u,t)$ は厳密には

$$f(u,t)=f(u,t;\Omega(u,t)dt,P(u,0)) \tag{A.6.195}$$

を意味する．通常の確率密度関数 $P(u,t)$ は，次のように $\Omega(u,t)dt$ のすべてのサンプルについて平均すると得られる．

$$P(u,t)=\Big\langle f(u,t;\Omega(u,t)dt,P(u,0))\Big\rangle. \tag{A.6.196}$$

$P(u,t)$ に対する方程式を導くためには，(A.6.192) を伊藤型の確率微分方程式に書き直すと便利である．伊藤型確率積は

$$dX(t)\cdot Y(t)=[X(t+dt)-X(t)]\,Y(t) \tag{A.6.197}$$

で定義される（量子確率演算子に対する確率積については，付録 A.7 節参照）．伊藤型確率積と Stratonovich 型確率積の変換公式は差分式

$$dX(t)\circ Y(t)=dX(t)\cdot Y(t)+\frac{1}{2}dX(t)\cdot dY(t) \tag{A.6.198}$$

で与えられる．これは，恒等式

$$\begin{aligned}[X(t+dt)-X(t)]\,\frac{Y(t+dt)+Y(t)}{2}&=[X(t+dt)-X(t)]\,Y(t)\\&\quad+\frac{1}{2}\,[X(t+dt)-X(t)]\,[Y(t+dt)-Y(t)]\end{aligned} \tag{A.6.199}$$

により導かれる．(A.6.198) を利用すると，(A.6.192) は伊藤型の確率 Liouville 方程式

$$df(u,t)=\frac{\partial}{\partial u}\left[\gamma u dt+\gamma\frac{T}{m}\frac{\partial}{\partial u}dt+\frac{1}{m}dB(t)\right]\cdot f(u,t) \tag{A.6.200}$$

に書き換えられる．導出に当たっては，(A.6.192) 右辺で，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}dB(t)\circ f(u,t) &= \frac{1}{m}dB(t)\cdot f(u,t)+\frac{1}{2m}dB(t)\cdot df(u,t) \\
&= \frac{1}{m}dB(t)\cdot f(u,t)\ +\frac{1}{2m}dB(t)\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{1}{m}dB(t)\cdot f(u,t) \\
&= \frac{1}{m}dB(t)\cdot f(u,t)\ +\frac{1}{2m^2}dB(t)dB(t)\left(-\frac{\partial}{\partial u}\right)f(u,t) \\
&= \left[\frac{1}{m}dB(t)+\gamma\frac{T}{m}\frac{\partial}{\partial u}dt\right]\cdot f(u,t) \qquad \text{(A.6.201)}
\end{aligned}
$$

と変形した．第 1 等号で (A.6.198) を用いた．第 2 等号では (A.6.192) を代入し，必要となる $\mathcal{O}(dt)$ までの寄与を記した．最後の等号では，(A.6.184) の第 2 式を，確率収束の意味で，

$$
dB(t)dB(t)=2m\gamma T dt \qquad \text{(A.6.202)}
$$

として用いた．

(A.6.200) の乱雑平均をとると，Fokker-Planck 方程式

$$
\frac{\partial}{\partial t}P(u,t)=\frac{\partial}{\partial u}\gamma\left(u+\frac{T}{m}\frac{\partial}{\partial u}\right)P(u,t) \qquad \text{(A.6.203)}
$$

が得られる．(A.6.203) の導出に当たって，

$$
\left\langle dX(t)\cdot Y(t)\right\rangle=0 \qquad \text{(A.6.204)}
$$

の性質を用いた．これは，伊藤型の確率積の定義 (A.6.197) により明らかである．(A.6.203) は，定常解

$$
P_{\mathrm{eq}}(u)=C\exp\left(-\frac{m}{2T}u^2\right) \qquad \text{(A.6.205)}
$$

をもつ．

ところで，(A.6.186) からわかるように，揺動的確率密度関数 $f(u,t)$ は，速度空間において，確率の保存

$$\int du\ f(u,t) = \text{一定} = 1 \tag{A.6.206}$$

を満たしている．また，Langevin 方程式 (A.6.183) が拡散項をもたないことも注目に値する．この方程式は Stratonovich 型 [128] の確率微分方程式であるので，計算を進めるに当たっては，確率関数 $u(t)$ をあたかも解析関数のように扱ってよい．第 2 種の揺動散逸定理 (A.6.191) は，Langevin 方程式 (A.6.183) が Fokker-Planck 方程式 (A.6.203) と一貫性をもつように導入されているのである．

A.7　確率積

Heisenberg 表示の確率的演算子 $X(t)$, $Y(t)$ に対する伊藤型確率積 [129] "·"，および，Stratonovich 型確率積 [128] "∘" は，それぞれ，

$$X(t) \cdot dY(t) = X(t)\,[Y(t+dt) - Y(t)]\,, \tag{A.7.207}$$

$$dX(t) \cdot Y(t) = [X(t+dt) - X(t)]\,Y(t), \tag{A.7.208}$$

および

$$X(t) \circ dY(t) = \frac{X(t+dt) + X(t)}{2}\,[Y(t+dt) - Y(t)]\,, \tag{A.7.209}$$

$$dX(t) \circ Y(t) = [X(t+dt) - X(t)]\,\frac{Y(t+dt) + Y(t)}{2} \tag{A.7.210}$$

で定義される．

(A.7.207)-(A.7.210) より，伊藤型確率積と Stratonovich 型確率積を結び付ける変換公式は，微分形式

$$X(t) \circ dY(t) = X(t) \cdot dY(t) + \frac{1}{2} dX(t) \cdot dY(t), \tag{A.7.211}$$

$$dX(t) \circ Y(t) = dX(t) \cdot Y(t) + \frac{1}{2} dX(t) \cdot dY(t) \tag{A.7.212}$$

で与えられることがわかる．

Schrödinger 表示において各確率積を関連付ける変換公式は，(A.7.211),

(A.7.212) と同じ形式

$$X_t \circ dY_t = X_t \cdot dY_t + \frac{1}{2} dX_t \cdot dY_t, \tag{A.7.213}$$

$$dX_t \circ Y_t = dX_t \cdot Y_t + \frac{1}{2} dX_t \cdot dY_t \tag{A.7.214}$$

で与えられる.

A.8 Laguerre 多項式

母関数

$$\frac{1}{1-x} \mathrm{e}^{-\zeta \frac{x}{1-x}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(\zeta) x^\ell \qquad (|x|<1) \tag{A.8.215}$$

あるいは,

$$L_\ell(\zeta) = \frac{1}{\ell!}\, \mathrm{e}^{\zeta}\, \frac{d^\ell}{d\zeta^\ell} \left(\mathrm{e}^{-\zeta} \zeta^\ell\right) \tag{A.8.216}$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} (-)^k \binom{\ell}{m} \frac{\zeta^k}{k!} \tag{A.8.217}$$

で定義される Laguerre 多項式 $L_\ell(\zeta)$ は，微分方程式

$$\zeta \frac{d^2 L_\ell(\zeta)}{d\zeta^2} + (1-\zeta) \frac{dL_\ell(\zeta)}{d\zeta} + \ell L_\ell(\zeta) = 0 \tag{A.8.218}$$

を満たしていることを示そう.

(A.8.217) およびその ζ 微分より,

$$L_\ell(0) = 1, \qquad \left.\frac{dL_\ell(\zeta)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = -\ell \tag{A.8.219}$$

の成立していることが確かめられる．ここで，Laguerre 多項式の具体形をいくつか記しておく.

$$L_0(\zeta)=1, \tag{A.8.220}$$

$$L_1(\zeta)=1-\zeta, \tag{A.8.221}$$

$$L_2(\zeta)=1-2\zeta+\frac{1}{2}\zeta^2, \tag{A.8.222}$$

$$L_3(\zeta)=1-3\zeta+\frac{3}{2}\zeta^2-\frac{1}{6}\zeta^3. \tag{A.8.223}$$

さて，(A.8.215) を ζ で微分し x で割ると，

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell(\zeta)' x^{\ell-1} = -\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{e}^{-\zeta\frac{x}{1-x}} \tag{A.8.224}$$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} L_\ell(\zeta)'' x^{\ell-2} = \frac{1}{(1-x)^3}\mathrm{e}^{-\zeta\frac{x}{1-x}} \tag{A.8.225}$$

となる．ただし，

$$L_\ell(\zeta)'=\frac{d}{d\zeta}L_\ell(\zeta), \quad L_\ell(\zeta)''=\frac{d^2}{d\zeta^2}L_\ell(\zeta) \tag{A.8.226}$$

とおいた．まず，(A.8.224) の両辺に $(1-x)$ をかけると，

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(\zeta)'(1-x)x^{\ell-1} = -\frac{1}{1-x}\mathrm{e}^{-\zeta\frac{x}{1-x}} = -\sum_{\ell=0}^{\infty} L_\ell(\zeta)x^\ell \tag{A.8.227}$$

を得る．第 2 等号では，(A.8.215) を用いた．和の指数 ℓ を調整すると，これより，

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[L_{\ell+1}(\zeta)'-L_\ell(\zeta)'+L_\ell(\zeta)\right]x^\ell=0 \tag{A.8.228}$$

が得られ，x が任意であることより，

$$L_{\ell+1}(\zeta)'=L_\ell(\zeta)'-L_\ell(\zeta) \tag{A.8.229}$$

が導き出せる．

次に，(A.8.215) を x で微分すると，

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell L_\ell(\zeta) x^{\ell-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \mathrm{e}^{-\zeta \frac{x}{1-x}} - \zeta \frac{1}{(1-x)^3} \mathrm{e}^{-\zeta \frac{x}{1-x}} \tag{A.8.230}$$

となる．これに (A.8.224) と (A.8.225) を代入すると，

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\ell L_\ell(\zeta) + L_\ell(\zeta)' + \zeta L_{\ell+1}(\zeta)'' \right] x^{\ell-1} = 0 \tag{A.8.231}$$

を得る．ここで，(A.8.229) を ζ で微分して (A.8.231) に代入すると，

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\zeta L_\ell(\zeta)'' + (1-\zeta) L_\ell(\zeta) + \ell L_\ell(\zeta) \right] x^{\ell-1} = 0 \tag{A.8.232}$$

が導き出せる．x は任意より，(A.8.218) が得られる．

ところで，$|x| < 1$，$|y| < 1$ に対する積分

$$I = \int_0^\infty d\zeta \ \mathrm{e}^{-\zeta} \frac{1}{1-x} \mathrm{e}^{-\zeta \frac{x}{1-x}} \frac{1}{1-y} \mathrm{e}^{-\zeta \frac{y}{1-y}} \tag{A.8.233}$$

$$= \frac{1}{1-xy} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (xy)^\ell \tag{A.8.234}$$

を考えてみよう．(A.8.233) の被積分関数に (A.8.215) を代入すると，

$$I = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^\ell y^m \int_0^\infty d\zeta \ \mathrm{e}^{-\zeta} L_\ell(\zeta) L_m(\zeta) \tag{A.8.235}$$

となる．(A.8.234) と (A.8.235) を比較して，

$$\int_0^\infty d\zeta \ \mathrm{e}^{-\zeta} L_\ell(\zeta) L_m(\zeta) = \delta_{\ell m} \tag{A.8.236}$$

を得る．

A.9 NETFD 建設の道筋と今後の展望

熱平衡状態から遠く離れた散逸量子系を扱う正準演算子形式の理論体系である Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics（NETFD）の体系*3は，初め，統計演算子を用いた緩和理論（damping theory）[135, 136, 137] を基礎にした「対応原理」により建設された [138, 139]．この体系が，実は，7つの公理の上に構築できることが示された [140]．次に，相互作用表示でのくり込まれた無限小時間発展演算子（半自由場ハット・ハミルトニアン）が，一粒子分布関数に対する運動方程式と抱き合わせで導き出された [141, 142]．したがって，NETFD の建設は，表 7.1 の基本的観点 I と II の切り口で建設が創められたのである．この観点で NETFD における正準演算子形式の量子散逸場の理論が建設され，NETFD の理論体系の構造が通常の量子場の理論のものと瓜二つであることが明らかにされた [143, 144, 145]．また，NETFD における母汎関数が導出された [146]．さらに，NETFD での運動学的方程式が書き下され [147]，NETFD の体系と閉じた時間経路法（closed time-path method）[148, 149, 150] との間の関係が示された．運動学的領域に加えて NETFD の流体力学的領域への拡張も始められた*4 [152, 153]．

NETFD の体系は，観点 I，II ばかりでなく，表 7.1 の III と IV の観点をもとり込むべく拡張されている [130, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161]．ここでも，NETFD は，確率的演算子に対する一貫した量子正準理論の構築を可能にするのである．Schrödinger 描像における伊藤型および Stratonovich 型確率 Liouville 方程式が導入された．一方，伊藤型および Stratonovich 型 Langevin 方程式は，確率 Liouville 方程式の無限小時間発展演算子を用いて Heisenberg 方程式を書き下すと与えられる．これにより，量子系における伊藤公式が導入された．

体系構築や新概念の追究ばかりでなく，NETFD はすでに多くの系に応用されている．たとえば，超伝導における熱真空の動的再編 [162]，スピン緩和 [163]，光学的位相緩和 [164]，レーザー・マスター方程式の導出 [165]，局所電子・フォノン系の量子光学現象 [166, 167, 168]，非線形緩和振動子 [157]，霧箱中の軌道（連続非破壊測定）[169]，量子 Kramers 方程式の微視的な導出 [170]，量子誤

---

*3 NETFD の全体像は，解説論文 [130, 131, 132, 133, 134] を参照．

*4 Zubarev と Tokarchuk は，NETFD の体系を高く評価し，NETFD を運動学的領域と流体力学的領域の研究に応用することを始めた [151]．

り訂正（空間相関のある外乱）[171] などがある．本書では，ボソン系とスピン系を扱っているが，フェルミオン系を含んだNETFDの統一的な体系については，文献 [161] を参照されたい．そこでは，フェルミオンに対する「チルダ共役をくり返しとる際の規則」と「熱状態条件」の不定性を決定するために，ベクトル場と Faddeev-Popov ゴースト [172] で構成される系を非平衡散逸系へ拡張して，NETFD を応用している*5.

NETFD の表現空間（熱空間とよばれる）は，チルダ場と非チルダ場に関する2つの Hilbert 空間の直積として構成されている*6．散逸現象は，この2つの Hilbert 空間両方にまたがる回転として解釈できることが明らかにされた．無限小時間発展演算子（ハット・ハミルトニアン）中のチルダ場と非チルダ場の積を含む項の存在が散逸現象を司っている．散逸系の時間発展は，チルダ粒子と非チルダ粒子の対（ペア）が真空に凝縮することにより推進される．この見解は，NETFD が建設されてはじめて認識されたものである．この発見は，「対称性の自発的破れ (spontanious symmetry breaking)」との類推で，「散逸の自発的発現 (spontanious creation of dissipation)」という新しい概念を想起させた [141, 145, 142, 175].

通常の場の量子論は，安定性の仮定の下につくられている．すなわち，真空の安定性と一粒子状態の安定性である．これらの安定性は，観測にかかる物理的粒子がくり込まれた質量をもつ漸近場で特定される摂動理論をつくる際に本質的である．真空（あるいは，表現空間）は，漸近場の生成・消滅演算子で規定される．有限温度では，真空はその安定性を保持するが，熱ゆらぎのため一粒子状態の安定性は失われる．この場合には，漸近場は存在しない．無限時間過去に戻っても，あるいは無限時間未来に行っても，漸近場を見つけることはできない．Heisenberg 演算子を漸近場で表現できないこの状況を救うために，動的写像 (dynamical mapping) [176, 177] の概念が導入された．非平衡散逸系では，事態はもっと困難なものとなる．その場合，一粒子状態ばかりでなく，真空も不安定になってしまうのである．動的写像の概念を，このチャレンジングな状況へいかにして拡張するかは，今後の興味深い問題の1つである [178].

---

*5 小嶋 [173] は，C^* 代数にて，有限温度（熱平衡状態）におけるベクトル場と Faddeev-Popov ゴースト系を扱った．そこでは，フェルミオンに対する「チルダ共役をくり返しとる際の規則」と「熱状態条件」の不定性を決定する問題が初めて議論されている．なお，ベクトル場と Faddeev-Popov ゴースト系を正準演算子形式の場の量子論で初めて扱ったのは，九後・小嶋 [174] である．

*6 NETFD では，あらゆる演算子 A は，対応するチルダ場 $\tilde{A}$ を伴っている．

熱平衡状態を扱う正準演算子形式の場の量子論である Thermo Field Dynamics (TFD) [125, 176, 177, 179] では，熱平衡状態の異なる温度に対応する 2 つの真空は，互いにユニタリ非同値 (unitary inequivalence) であることが示されている．温度 T での熱力学量は，対応するオブザーバブル演算子を，その温度の熱真空上につくられた Fock (フォック) 空間で表現することにより得られる．したがって，準静的熱力学過程とは，いわば，互いにユニタリ非同値な異なる温度の表現空間を，次々渡り歩くことに対応している．

それでは，実際に起こる非平衡過程に対しては，互いに直交する (非同値) 表現空間の集合を渡り歩くこの状況を，どのように解釈したらよいのであろうか？ 真空膨張過程に対する熱力学的解釈を思い出すと，この状況がより鮮明となるであろう．NETFD を用いると，互いに非同値な表現空間の集まりの中を真空が突き進む状況をいかに扱うべきかが見えてくる．すなわち，熱真空の時間発展 (つまり，表現空間の時間発展) は散逸を伴う熱過程が支配し，場の運動は力学的な規則が支配すると捉えるのである．前者の時間発展は巨視的な時間スケールで記述され，一方，後者のそれは微視的な時間スケールで記述されるはずである [178].

関連図書

第 1 章

[1] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics, 4th ed.*(Oxford: Oxford University Press, 1958).

本書で用いたブラ・ケットの記法は Dirac によって導入された．Dirac の書いたこの本は今でも量子力学の代表的教科書である．同書の訳本は，

ディラック著，朝永振一郎・玉木英彦・木庭二郎・大塚益比古・伊藤大介訳，『量子力学　原書第 4 版』（東京：岩波書店，1968）．

[2] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (California: The Benjamin /Cummings Publishing Company, Inc., 1985).

これは新しい話題を盛り込んだディラック流の教科書で，同書も和訳されている．

桜井 純著，段 三孚編集，桜井明夫訳，『現代の量子力学　上・下』（京都：吉岡書店，1989）．

経路積分法のテキストは，

R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill Book Company, 1965).

R.P. ファインマン・A.R. ヒッブス著，北原和夫訳，『量子力学と経路積分』（東京：みすず書房，1995）．

[3] S. M. Barnett and P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford: Clarendon Press, 1997).

[4] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: John Wiley & Sons, 1973).

コヒーレント状態に関しては量子光学関連の書物にくわしい．[4] は多少古いが，これら 2 つの教科書をあげておく．

第 2 章

[5] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).

Jaynes-Cummings 模型の原論文である．

[6] K. Hepp, *Helv. Phys. Acta* **45**, 237 (1972).

本書では調和振動子の集合が検出器を構成している模型を用いているが，元来の模型はスピン系から成っている．これを Coleman-Hepp 模型という．

この模型に関連して，

H. Nakazato and S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1 (1993),

K. Hiyama and S. Takagi, *Phys. Rev.* A **48**, 2586 (1993)

をあげておく．

[7] H. Hiyama and S. Takagi, *Phys. Rev.* A **48**, 2586 (1993); T. Kobayashi, *Phys. Lett.* A **185**, 349 (1994).

Coleman-Hepp 模型のスピンを調和振動子に置き換えた模型が論じられている．

[8] S. Kitajima, R. Yamagami and F. Shibata, *J. Phys. Soc. Jpn.* **69**, 2004 (2000).

本章の内容はこの論文によっている.

第 3 章

[9] S. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **20**, 948 (1958).

[10] R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **33**, 1338 (1960).

射影演算子法の歴史は古いが, Schrödinger 描像における TC 型に関しては, Nakajima-Zwanzig の方程式とよばれている. [9] にかかれているように, この方法は Kubo (久保亮五) に遡る.

[11] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Berlin: Springer-Verlag, 1978).

本章の基本的事項に関する代表的参考書としてこの本をあげておく.

[12] H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **33**, 423 (1965).

Heisenberg 描像での方法論は Mori (森 肇) によって展開された.

[13] F. Shibata and T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **49**, 891 (1980).

[14] C. Uchiyama and F. Shibata, *Phys. Rev.* E **60**, 2636 (1999).

TC 型, TCL 型の双方に関し, 本書の内容はこれら 2 つの論文 [13], [14] によっている. TCL 型方程式に関する初期のいくつかの論文を以下の [15]-[17] にあげておく. また [18] はこの分野の比較的新しい文献である.

[15] T. Shimizu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **28**, 1088 (1970).

[16] M. Tokuyama and H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **55**, 411 (1976).

[17] F. Shibata, Y. Takahashi and N. Hashitsume, *J. Stat. Phys.* **17**,171 (1977).

[18] H. P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press, 2006).

第 4 章

[19] H. -P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press, 2006).

[20] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000).

[21] 佐々木雅英・松岡正浩監修,『量子情報通信』(東京：オプトロニクス社, 2006).

[22] S. L. Braunstein and A. K. Pati, eds., *Quantum Information with Continuous Variables* (Dordrecht: Kluwer, 2003).

[23] M. Ban, S. Kitajima and F. Shibata, *J. Phys.* A **38**, 7161 (2005).

[24] M. Ban, S. Kitajima and F. Shibata, *J. Phys.* A **38**, 4235 (2005).

[25] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **9**, 935 (1954).

[26] P. Anderson, *J. Phys. Soc. Jpn.* **9**, 316 (1954).

[27] M. Ban, S. Kitajima and F. Shibata, *Phys. Lett.* A **349**, 415 (2006).

[28] G. S. Agarwal and E. Wolf, *Phys. Rev.* D **2**, 2161 (1970).

[29] G. S. Agarwal and E. Wolf, *Phys. Rev.* D **2**, 2187 (1970).

[30] G. S. Agarwal and E. Wolf, *Phys. Rev.* D **2**, 2206 (1970).

[31] S. M. Barnett and P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford: Oxford University Press, 1997).

[32] M. Ban, *J. Phys.* A **39**, 1927 (2006).

[33] C. M. Caves, *Phys. Rev.* D **26**, 1817 (1982).

[34] M. Ban, *Phys. Lett.* A **359**, 402 (2006).

第 5 章

[35] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (New York: Kluwer, 1993).

[36] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*(Cambridge: Cambridge University Press, 2000).

[37] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, *Phys. Rev.* A **53**, 2046 (1996).

[38] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and W. K. Wootters, *Phys. Rev.* A **54**, 3824 (1996).

[39] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).

[40] M. B. Ruskai, *Rev. Math. Phys.* **15**, 643 (2003).

[41] M. Ban, S. Kitajima and F. Shibata, *J. Phys.* A **38**, 4253 (2005).

[42] T. Yu and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140404 (2004).

[43] T. Yu and J. H. Eberly, *Opt. Commun.* **264**, 393 (2006).

[44] M. Ban, S. Kitajima and F. Shibata, *J. Phys.* A **38**, 7161 (2005).

[45] M. Ban and F. Shibata, *Phys. Lett.* A **354**, 35 (2006).

[46] M. Ban, *Opt. Commun.* **281**, 3943 (2008)

[47] T. Yu and J. H. Eberly, *Quant. inf. Comp.* **7**, 459 (2007).

[48] M. Ban, *J. Phys.* A **39**, 1927 (2006).

[49] B. Englert and K. Wódkiewicz, *Phys. Rev.* A **65**, 054303 (2003).

[50] L. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).

[51] G. Giedke, M. Wolf, O. Krüger, R. Werner and J. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 107901 (2003).

第 6 章

[52] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000).

[53] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (New York: Wiley, 1991).

[54] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

[55] G. Bowen and S. Bose, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 267901 (2001).

[56] M. Ban, S. Kitajima and F. Shibata, *J. Phys.* A **38**, 7161 (2005).

[57] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).

[58] M. Ban, S. Kitajima and F. Shibata, *J. Phys.* A **37**, L429 (2004).

[59] S. Braunstein and H. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).

[60] S. L. Braunstein and A. K. Pati, eds., *Quantum Information with Continuous Variables* (Dordrecht: Kluwer, 2003).

[61] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).

[62] M. Ban, M. Sasaki and M. Takeoka, *J. Phys.* A **35**, L401 (2002).

[63] M. Ban, *Phys. Rev.* A **69**, 054304 (2004).

第 7 章

[64] 有光敏彦, **数理科学**（東京：サイエンス社, 1990）, pp.22–29.

[65] R. Kubo, *J. Math. Phys.* **4**, 174 (1963).
[66] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Berlin: Springer, 1985).
[67] I. R. Senitzky, *Phys. Rev.* **119**, 670 (1960); *ibid.* **124**, 642 (1961).
[68] M. Lax, *Phys. Rev.* **145**, 110 (1966).
[69] H. Haken, *Optics. Handbuch der Physik* vol. XXV/2c (1970), [*Laser Theory* (Berlin : Springer-Verlag, 1984)].
[70] F. Shibata and N. Hashitsume, *J. Phys. Soc. Jpn.* **44**, 1435 (1978).
[71] T. Arimitsu, *Int. J. Mod. Phys.* B **10**, 1585 (1995).
[72] T. Arimitsu, *Physics Essays* **9**, 591 (1996).
[73] R. Stratonovich, *J. SIAM Control* **4**, 362 (1966).
[74] K. Ito, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 519 (1944).
[75] T. Hida, *Brownian Motion* (Berlin : Springer-Verlag, 1980).
[76] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space* (*Lecture Notes in Math.* **1577**, Berlin : Springer-Verlag, 1994).
[77] U. C. Ji and N. Obata, *Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads*, Eds. N. Obata, T. Matsui and A. Hora (Singapore: World Scientific, 2002), pp.143–191.
[78] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Commun. Math. Phys.* **93**, 301 (1984).
[79] R. L. Hudson and J. M. Lindsay, *Ann. Inst. H. Poincarè* **43**, 133 (1985).
[80] T. Imagire, T. Saito, K. Nemoto and T. Arimitsu, *Physica* A **256**, 129 (1997).
[81] T. Imagire and T. Arimitsu, *Stochastic Processes and their Applications*, Eds. A. Vijayakumar and M. Sreenivasan (Madras: Narosa Publishing House, 1999), pp.334–338.

第8章

[82] T. Saito and T. Arimitsu, *Mod. Phys. Lett.* B **6**, 1319 (1992).
[83] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 53 (1987).
[84] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **74**, 429 (1985).
[85] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 32 (1987).
[86] T. Arimitsu, Y. Takahashi and F. Shibata, *Physica* A **100**, 507 (1980).
[87] T. Tominaga, M. Ban, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* A **149**, 26 (1988).
[88] T. Tominaga, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* A **150**, 97 (1988).
[89] T. Saito and T. Arimitsu, *Mod. Phys. Lett.* B **7**, 623 (1993).
[90] S. Fujita, *Introduction to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics* (Malabar, Florida: Robert E. Krieger Pub. Comp., 1983).
[91] T. Arimitsu, Y. Sudo and H. Umezawa, *Physica* A **146**, 433 (1987).
[92] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, *Europhys. Lett.* **3**, 277 (1987).
[93] 有光敏彦，数理科学（東京：サイエンス社，1996），pp.14–21.
[94] J. A. Crawford, *Nuovo Cim.* **10**, 698 (1958).
[95] M. Schmutz, *Z. Phys.* B **30**, 97 (1978).
[96] N. N. Bogoliubov, A. A. Lognov and I. T. Todolov, *Introduction to Ax-*

iomatic Quantum Field Theory (Amsterdam: Benjamin, 1975).

第 9 章

[97] H. Haken, *Optics. Handbuch der Physik* vol. XXV/2c (1970), [*Laser Theory* (Berlin Heidelberb: Springer-Verlag, 1984)].
[98] I. R. Senitzky, *Phys. Rev.* **119**, 670 (1960); *ibid.* **124**, 642 (1961).
[99] M. Lax, *Phys. Rev.* **145**, 110 (1966).
[100] H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **33**, 423 (1965).
[101] F. Shibata and N. Hashitsume, *J. Phys. Soc. Jpn.* **44**, 1435 (1978).
[102] R. F. Streater, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, 1477 (1982).
[103] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Commun. Math. Phys.* **93**, 301 (1984).
[104] R. L. Hudson and J. M. Lindsay, *Ann. Inst. H. Poincarè* **43**, 133 (1985).
[105] H. Hasegawa, J. R. Klauder and M. Lakshmanan, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, L123 (1985).
[106] K. R. Parthasarathy, *Rev. Math. Phys.* **1**, 89 (1989).
[107] L. Accardi, *Rev. Math. Phys.* **2**, 127 (1990).
[108] R. Kubo, *J. Phys. Soc. Japan* **26** Suppl., 1 (1969).
[109] T. Arimitsu, *Phys. Lett.* A **153**, 163 (1991).
[110] 有光敏彦，数理科学（東京：サイエンス社，1996），pp.14–21.
[111] A. E. Kobryn, T. Hayashi and T. Arimitsu, *Annals of Physics* **308/2**, 395 (2003).
[112] R. Stratonovich, *J. SIAM Control* **4**, 362 (1966).
[113] K. Ito, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 519 (1944).
[114] M. J. Collett and C. W. Gardiner, *Phys. Rev.* A **30**, 1386 (1985).
[115] C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev.* A **31**, 3761 (1985).
[116] T. Arimitsu, *Condensed Matter Physics* **4**, 26 (1994).
[117] T. Arimitsu, *Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads*, Eds. N. Obata, T. Matsui and A. Hora (Singapore: World Scientific, 2002), pp.206–224.
[118] T. Arimitsu, *Fundamental Aspects of Quantum Physics*, Eds. L. Accardi and S. Tasaki (Singapore: World Scientific, 2003), pp.24–47.
[119] T. Imagire, T. Saito, K. Nemoto and T. Arimitsu, *Physica* A **256**, 129 (1997).
[120] T. Imagire and T. Arimitsu, *Stochastic Processes and their Applications*, Eds. A. Vijayakumar and M. Sreenivasan (Madras: Narosa Publishing House, 1999), pp.334–338.
[121] T. Hida, *Brownian Motion* (Berlin: Springer-Verlag, 1980).
[122] N. Obata, *White Noise Calculus and Fock Space* (*Lecture Notes in Math.* **1577**, Berlin : Springer-Verlag, 1994).
[123] U. C. Ji and N. Obata, *Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads*, Eds. N. Obata, T. Matsui and A. Hora (Singapore: World Scientific, 2002), pp.143–191.
[124] N. N. Bogoliubov, A. A. Lognov and I. T. Todolov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory* (Amsterdam: Benjamin, 1975).

付 録

[125] Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collect. Phenom.* **2**, 55 (1975).
[126] R. Kubo, *J. Math. Phys.* **4**, 174 (1963).
[127] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985).
[128] R. Stratonovich, *J. SIAM Control* **4**, 362 (1966).
[129] K. Ito, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**, 519 (1944).
[130] T. Arimitsu, *Condensed Matter Physics* **4**, 26 (1994).
[131] 有光敏彦, 物性研究 **62-1**, 31 (1994-4).
[132] 有光敏彦, 数理科学（東京：サイエンス社, 1996）, pp.14–21.
[133] T. Arimitsu, *Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads*, Eds. N. Obata, T. Matsui and A. Hora (Singapore: World Scientific, 2002), pp.206–224.
[134] T. Arimitsu, *Fundamental Aspects of Quantum Physics*, Eds. L. Accardi and S. Tasaki (Singapore: World Scientific, 2003), pp.24–47.
[135] F. Haake, *Springer Tracts in Modern Physics*, vol. **66** (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1973), p.98.
[136] F. Shibata and T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Japan* **49**, 891 (1980).
[137] T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Japan* **51**, 1720 (1982).
[138] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **74**, 429 (1985).
[139] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 32 (1987).
[140] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 53 (1987).
[141] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, *Europhys. Lett.* **3**, 277 (1987).
[142] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, *Physica* A **148**, 1 (1988).
[143] T. Arimitsu and H. Umezawa, *J. Phys. Soc. Japan* **55**, 1475 (1986).
[144] H. Umezawa and T. Arimitsu, *Prog. Theor. Phys. Supplement* **86**, 243 (1986).
[145] T. Arimitsu, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *J. Math. Phys.* **28**, 2741 (1987).
[146] T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* A **135**, 487 (1986).
[147] T. Arimitsu, *Physica* A **148**, 427 (1988).
[148] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2**, 407 (1961).
[149] L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20**, 1018 (1965).
[150] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, *Phys. Rep.* **118**, 1 (1985).
[151] D. N. Zubarev and M. V. Tokarchuk, *Theor. Math. Phys.* **88**, 876 (1991).
[152] T. Arimitsu, *Physica* A **158**, 317 (1989).
[153] T. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24**, L1415 (1991).
[154] T. Arimitsu, *Phys. Lett.* A **153**, 163 (1991).
[155] T. Arimitsu, *Thermal Field Theories*, Eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (Amsterdam: North-Holland, 1991), pp.207–221.
[156] T. Saito and T. Arimitsu, *Mod. Phys. Lett.* B **6**, 1319 (1992).
[157] T. Saito and T. Arimitsu, *Mod. Phys. Lett.* B **7**, 623 (1993).
[158] T. Arimitsu, *Int. J. Mod. Phys.* B **10**, 1585 (1995).
[159] T. Saito and T. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 7573 (1997).
[160] T. Imagire, T. Saito, K. Nemoto and T. Arimitsu, *Physica* A **256**, 129 (1997).

[161] A. E. Kobryn, T. Hayashi and T. Arimitsu, *Annals of Physics* **308/2**, 395 (2003).

[162] T. Arimitsu, Y. Sudo and H. Umezawa, *Physica* A **146**, 433 (1987).

[163] T. Tominaga, M. Ban, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa. *Physica* A **149**, 26 (1988).

[164] M. Ban and T. Arimitsu, *Physica* A **146**, 89 (1987).

[165] T. Tominaga, T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica* A **150**, 97 (1988).

[166] T. Iwasaki, T. Arimitsu and F. H. Willeboordse, *Thermal Field Theories*, Eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (Amsterdam: North-Holland, 1991), pp.459–468.

[167] T. Arimitsu, F. H. Willeboordse and T. Iwasaki, *Physica* A **182**, 214 (1992).

[168] T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Phys. Rev.* E **50**, 121 (1994).

[169] T. Arimitsu, *Stochastic Processes and their Applications*, Eds. A. Vijayakumar and M. Sreenivasan (Madras: Narosa Publishing House, 1999), pp.279–294.

[170] T. Satio and T. Arimitsu, *Stochastic Processes and their Applications*, Eds. A. Vijayakumar and M. Sreenivasan (Madras: Narosa Publishing House, 1999), pp.323–333.

[171] T. Hayashi, T. Arimitsu, S. Kitajima and F. Shibata, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, F457 (2007).

[172] L. D. Faddeev and V. Popov, *Phys. Lett.* B **25**, 29 (1967).

[173] I. Ojima, *Ann. of Phys.* **137**, 1 (1981).

[174] T. Kugo and I. Ojima, *Phys. Lett.* B **73** 459.

[175] T. Arimitsu, H. Umezawa, Y. Yamanaka and P. Papastamatiou, *Physica* A **148**, 27 (1988).

[176] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (Amsterdom: North-Holland, 1982).

[177] H. Umezawa 著，有光敏彦・有光直子訳，**『場の量子論 ——ミクロ，マクロ，そして熱物理学の最前線』**（東京：培風館，1995）

[178] T. Arimitsu, *Physics Essays* **9**, 591 (1996).

[179] L. Leplae, H. Umezawa and F. Mancini, *Physics Reports* **10C**, 153 (1974).

索 引

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

ワ 行

執筆者紹介

柴田文明（しばた・ふみあき）

1942年生まれ．1971年，東京教育大学大学院理学研究科博士課程修了．お茶の水女子大学理学部教授を経て，現在，お茶の水女子大学名誉教授，国際基督教大学研究員．理学博士．
[主要著書]『確率・統計』(岩波書店，1996年)．
[専門分野] 統計物理学，特に非平衡量子統計力学．

有光敏彦（ありみつ・としひこ）

1952年生まれ．1980年，東京大学大学院理学系研究科博士課程物理学専攻修了．現在，筑波大学大学院数理物質科学研究科教授．理学博士．
[主要著書]『カオスとトポロジー』(共著，培風館，1999年)，『エネルギーと熱』(培風館，1989年)．
[専門分野] 非平衡系統計物理学，散逸系の場の量子論，乱流のマルティフラクタル理論，散逸系カオス．

番 雅司（ばん・まさし）

1959年生まれ．1987年，筑波大学大学院物理学研究科修了．現在，お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授，理学博士．
[専門分野] 非平衡量子統計力学，量子情報理論．

北島佐知子（きたじま・さちこ）

1974年生まれ．2001年，お茶の水女子大学大学院人間文化研究科博士課程修了．お茶の水女子大学大学院人間文化研究科助手を経て，現在，お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科准教授，博士（理学）．
[専門分野] 非平衡量子統計物理学，量子情報理論．

量子と非平衡系の物理

量子力学の基礎と量子情報・量子確率過程

2009年11月20日　初版

[検印廃止]

著者　柴田文明・有光敏彦・番 雅司・北島佐知子

発行所　財団法人　東京大学出版会

代表者　長谷川寿一

113-8654 東京都文京区本郷 7-3-1 東大構内

電話 03-3811-8814　Fax 03-3812-6958

振替 00160-6-59964

印刷所　大日本法令印刷株式会社

製本所　誠製本株式会社

ISBN978-4-13-062611-8

Printed in Japan